mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

Category Theory

Part II.2: Universal Properties and the Category of Elements
Leitung: Prof. U. Krähmer

Inhaltsverzeichnis

1 Introduction **3**

Definition 1.1 (Darstellbare Funktoren) . . . 3
Satz 1.3 (Yoneda-Lemma, Kovarianter Fall) . . . 3

2 Universal Properties and Universal Elements **5**

2.1 Motivation . . . 5
Definition 2.2 (Konstanter Funktor) . . . 5
Definition 2.3 (Initiale und Terminale Objekte) . . . 5
Definition 2.5 (Universelle Eigenschaft) . . . 5
2.8 Zentrale Resultate . . . 6
Satz 2.9 (Äquivalenz kategorielle und darstellende Isomorphie) . . . 6
Definition 2.12 ((Universelles) Element) . . . 8
2.14 Konklusion . . . 8
2.16 Beispiele . . . 9
Beispiel 2.17 (Vergissfunktor I) . . . 9
Beispiel 2.18 (G-Torsor) . . . 9
Beispiel 2.19 (Tensorprodukt) . . . 9

3 The Category of Elements **11**

3.1 Motivation . . . 11
Definition 3.3 (Kategorie der Elemente, K.d.E.) . . . 11
Beispiel 3.5 (Vergissfunktor II) . . . 12
Beispiel 3.7 (Schnitt-Kategorie / Slice - Category) . . . 12

zul. geändert am 7. November 2026

3.9 Zentrale Resultate 13
Lemma 3.10 (Äquivalenz K.d.E. und Komma-Kategorie) 13
Satz 3.12 (Univers. Elemente sind Univers. Elemente) 14
3.13 Konklusion 15
3.16 Beispiele 16
Beispiel 3.17 (Potenzmengenfunktor) 16
Beispiel 3.18 (Bilineare Abbildungen) 16
Beispiel 3.19 (Vergissfunktor auf Ringen) 17

1 Introduction

Wir erinnern uns zurück...

Definition 1.1. (Darstellbare Funktoren)**.** *Sei $C \in$* **Cat***, lokal klein. Ein ko- (bzw. kontra-) varianter Funktor $F : C \to$* **Set** *heißt* **darstellbar***, falls*

(i) ein natürlicher Isomorphismus $\alpha : C(c, -) \overset{\cong}{\Longrightarrow} F$ zwischen dem Hom-Funktor $C(c, -)$ und F im kovarianten Fall oder

(ii) ein natürlicher Isomorphismus $\beta : C(-, c) \overset{\cong}{\Longrightarrow} F$ zwischen dem Hom-Funktor $C(-, c)$ und F im kontravarianten Fall

für ein Objekt $c \in \mathrm{Ob}(C)$ existiert.

Bemerkung 1.2 (zu Definition 1.1)**.**

- Ein beliebiger kovarianter Funktor $F : C \to$ **Set** mit Domain lokal klein schickt ein Objekt c auf eine Menge Fc und einen Morphismus $f : c \to d$ auf eine Mengenabbildung $Ff : Fc \to Fd$.
- Falls F durch ein c darstellbar sein sollte, dann können wir jede beliebige Zielmenge Fd eines Objektes $d \in C$ gerade identifizieren mit der **Menge der Morphismen** $C(c, d)$ von $c \to d$ (starke Aussage über Kardinalität usw...); und gleichzeitig jeden Zielmorphismus $Ff : Fd \to Fe$ mit der **Präkomposition** $f^* : C(c, d) \to C(c, e), g \mapsto f \circ g$ (und da kann es sein, dass einige Objekte zusammenfallen, nicht alles getroffen wird, usw... ABER: es gibt eine exakte Identifikation)

Letztes Mal haben wir uns über die Existenz solcher Darstellbarkeiten Gedanken gemacht und dabei eines der wichtigsten Sätze der Kategorientheorie festgehalten:

Satz 1.3. (Yoneda-Lemma, Kovarianter Fall)**.** *Für jeden kovarianten Funktor $F : C \to$* **Set** *aus einer lokal kleinen Kategorie C ist die folgende Abbildung eine Bijektion:*

$$\mathrm{Hom}(C(c, -), F) \longrightarrow Fc$$

$$\alpha \longmapsto \alpha_c(\mathrm{id}_c)$$

Bemerkung 1.4 (zu Satz 1.3)**.** Versuchen wir noch mal kurz nur ansatzweise die bedeutende Tragweite dieses Satzes zu verstehen.

- Der Satz liefert eben nicht nur überhaupt eine Existenz von natürlichen Transformationen für jeden beliebigen Funktor F aus einer lokal kleinen Kategorie, sondern sogar genau die Anzahl solcher $\alpha : C(c, -) \Longrightarrow F$ für jedes $c \in \mathrm{Ob}(C)$. Mit anderen Worten:

"Für jedes Objekt $c \in \mathrm{Ob}(C)$ gibt genau so viele natürliche Transformationen $\alpha : C(c, -) \Longrightarrow F$, wie es Elemente in Fc gibt."

- Im Beweis zeigen wir diese Bijektion mittels Umkehrabbildung, doch eine viel bessere Intuition wird in Beispiel 2.2.1 in Riehls Buch vermittelt; nämlich die Transformation aus der Ordinalen Kategorie $\mathfrak{w}$ nach F. Aus dieser Überlegung ging hervor, dass jede natürliche Transformation **wegen ihrer Natürlichkeit** eindeutig durch Bild von $\alpha_k(\mathfrak{w}(k, k))$, also das Bild eines Singletons $*$ bestimmt ist. Dies gleicht der Auswahl eines Elements aus Fk...

! Im Allgemeinen sind die Transformationen $\alpha \in \mathrm{Hom}(C(c, -), F)$ keine Isomorphien. Daher wissen wir nicht genau, ob F auch tatsächlich immer darstellbar ist, bzw. gibt es in der Tat Funktoren, die **nicht darstellbar** sind.

Heute wollen wir studieren, wie die Hom-Funktoren $C(c, -)$ konkret bezüglich des Objektes $c \in \mathrm{Ob}(C)$ aussehen können. Gibt es beispielsweise Objekte, in denen die Yoneda-Transformation besonders "schön" ist? Oder anders gibt es Objekte c in denen die Darstellungen von F sehr schön sind...? Insbesondere beantworten wir die Fragen, die Riehl am Ende von Kapitel §2.1 stellt.

2 Universal Properties and Universal Elements

2.1 Motivation

Definition 2.2. (Konstanter Funktor)**.** *Sei C eine lokal kleine Kategorie. Der konstante Funktor $\Delta*$ ist definiert durch:*

$$\Delta* : \quad C \longrightarrow \mathbf{Set}, \quad \mathrm{Ob}(C) \ni c \longmapsto *, \quad C(c,d) \ni f \longmapsto \mathrm{id}_*$$

Definition 2.3. (Initiale und Terminale Objekte)**.** *Sei C eine lokal kleine Kategorie. Ein Objekt $c \in \mathrm{Ob}(C)$ heißt*

(i) **initial**, *falls der Hom-Funktor $C(c,-) : C \to \mathbf{Set}$ natürlich isomorph zum konstanten Funktor $\Delta* : C \to \mathbf{Set}$ ist*

(ii) **terminal**, *falls der Hom-Funktor $C(-,c) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ natürlich isomorph zum konstanten Funktor $\Delta* : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$*

Mit der Terminologie die uns bereits zur Darstellbarkeit zur Verfügung steht, folgt tautologisch:

Korollar 2.4 (Äquivalenz Darstellbarkeit und Existenz initialer / terminaler Objekte)**.** *Eine Kategorie C besitzt genau dann ein initiales (bzw. terminales) Objekt, wenn der Funktor $\Delta* : C \to \mathbf{Set}$ (bzw. $\Delta* : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$) darstellbar ist.*

Definition 2.5. (Universelle Eigenschaft)**.** *Sei $F : C \to \mathbf{Set}$ ein darstellbarer Funktor und $F \cong C(c,-)$. Dann sagen wir:*

$$F \cong C(c,-) :\Longleftrightarrow \text{"}F \text{ codiert die universelle Eigenschaft von } c\text{."}$$

Bemerkung 2.6 (zu Definition 2.3, 2.5)**.**

- Die Definition 2.5 soll unsere Definition 2.3 erweitern, in dem Sinne, dass es noch mehr universelle Eigenschaften gibt, als "initial" und "terminal".
- Wir bezeichnen für kovariante darstellbare Funktoren, dass c eine "**mapping-out**" universelle Eigenschaft besitzt und vice versa für kontravariante Funktoren: c besitzt eine "**mapping-in**" universelle Eigenschaft.

Bemerkung 2.7. Es kommen natürliche Fragen auf (vgl. §2.1):

1. Wie einzigartig sind diese universellen Eigenschaften? Genauer: Falls zwei Objekte c und c' denselben Funktor darstellen, sind diese dann (natürlich) isomorph?
2. Welche Informationen werden zur Konstruktion eines natürlichen Isomorphismus zwischen dem darstellbaren Funktor F und seiner Darstellung $C(c, -)$ benötigt?
3. Wie hängen universelle Eigenschaften dargestellt durch Funktoren mit initialen und terminalen Objekten zusammen?

2.8 Zentrale Resultate

Satz 2.9. (Äquivalenz kategorielle und darstellende Isomorphie)**.** *. Sei C eine lokal kleine Kategorie. Dann sind die folgenden Aussagen für $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ äquivalent bzw. enthalten dieselben Informationen:*

(i) $x \cong y$ *in der Kategorie* C*.*

(ii) $C(-, x) \cong C(-, y)$ *in der Kategorie* $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$

(iii) $C(x, -) \cong C(y, -)$ *in der Kategorie* $\mathbf{Set}^{C}$

Beweis. Die Äquivalenzen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) sowie (i) $\Leftrightarrow$ (iii) folgen aus direkt als Konsequenz aus der volltreuen Eigenschaft der Yoneda Einbettungen $\mathcal{Y} : C \hookrightarrow \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ und $\mathcal{Y} : C^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathbf{Set}^{C}$. Wir rechnen zur Übung das ganze noch einmal nach, um die Aussagen "Funktoren erhalten Isomorphismen" (Lemma 1.3.8) und "volltreue Funktoren reflektieren Isomorphismen" (Übung 1.5.iv) zu verinnerlichen.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $f : x \to y \in C(x, y)$ ein Isomorphismus. Dann existiert ein beidseitig inverser Morphismus $g : y \to x$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_x$. Betrachte noch einmal präzise die Yoneda-Einbettung $\mathcal{Y} : C \hookrightarrow \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$

Für Objekte $x \in \mathrm{Ob}(C)$

$$\mathcal{Y}(x) = \; C(-, x) : \begin{cases} c \mapsto C(c, x) \\ [g : c \to c'] \mapsto [g^* : C(c', x) \to C(c, x),\ h \mapsto h \circ g] \end{cases}$$

$$= C(-, x) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set} \text{ ... kontravarianter Funktor}$$

Für Morphismen $f \in C(x, y)$

$$\mathcal{Y}(f) = f_* : \begin{cases} C(c,x) \ni h \mapsto f \circ h \in C(c,y) \text{ auf den Objekten in } \mathbf{Set} \\ [g^* : C(c',x) \to C(c,x), ...] \mapsto [f \circ g^* : C(c',y) \to C(c,y), ...] \\ \text{ auf den Morphismen in } \mathbf{Set} \end{cases}$$

$= f_* : C(-,x) \Longrightarrow C(-,y)$ ... natürliche Transformation zwischen Funktoren

Dann wäre zu überprüfen, ob $\mathcal{Y}(g) \circ \mathcal{Y}(f) = \mathrm{id}_{C(-,x)}$ und $\mathcal{Y}(f) \circ \mathcal{Y}(g) = \mathrm{id}_{C(-,y)}$ Und tatsächlich, seien $c \in \mathrm{Ob}(C)$ und $h \in C(c,x)$ beliebig.

$$(\mathcal{Y}(g) \circ \mathcal{Y}(f))(h) = g_* \circ f_*(h) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_x \circ h = h$$

hier bereits $\mathcal{Y}(g) \circ \mathcal{Y}(f)|_{\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ob}(\mathbf{Set})}$. Seien nun noch $c, c' \in \mathrm{Ob}(C)$ und $i^* : C(c,x) \to C(c',y)$ und $h \in C(c,x)$ beliebig. Dann ist

$$(\mathcal{Y}(g) \circ \mathcal{Y}(f))(i^*(h)) = g_* \circ f_*(i^*(h)) = g \circ (f \circ (h \circ i))$$

$$= (g \circ f) \circ (h \circ i) = (id_x \circ h) \circ i = h \circ i = i^*(h)$$

Also auch $\mathcal{Y}(g) \circ \mathcal{Y}(f)|_{\hom(\mathbf{Set})} = \mathrm{id}_{\hom(\mathbf{Set})}$ und für Rechtsinversion simultan.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $\alpha : C(-,x) \Longrightarrow C(-,y)$ ein natürlicher Isomorphismus zwischen Funktoren. Es gilt zu zeigen, dass dann auch $x \cong y$ in C.

Da $\mathcal{Y} : C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ voll ist, gibt es einen Morphismus $f \in C(x,y)$ mit $\mathcal{Y}(f) = \alpha$ sowie einen Morphismus $g \in C(y,x)$ mit $\mathcal{Y}(g) = \alpha^{-1}$. Nun ist allerdings leicht zu sehen, dass

$$\mathcal{Y}(g \circ f) = (g \circ f)_*(\cdot) = (g \circ f) \circ (\cdot) = g \circ (f \circ (\cdot)) = g_*(f_*(\cdot)) = (\alpha^{-1} \circ \alpha)(\cdot) = \mathrm{id}_{C(-,x)}$$

Und andersherum genauso. Da $\mathcal{Y}$ ebenfalls treu ist, folgt aus $\mathcal{Y}(g \circ f) = \mathrm{id}_{C(-,x)}$ bereits $g \circ f = \mathrm{id}_x$.

Aus Dualitätsgründen gilt auch (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). □

Korollar 2.10. *Seien $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$ und stellen denselben Mengen-wertigen Funktor dar. Dann sind x und y isomorph, mehr noch: Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $f : x \to y$ der mit allen natürlichen Transformationen kommutiert.*

Korollar 2.11. *Die Unterkategorie einer Kategorie C aufgespannt durch ihre terminalen Objekte ist entweder leer oder ein kontrahierbarer Gruppoid, gemeint natürlich isomorph zur terminalen Kategorie $\mathbb{1}$.*

Definition 2.12. ((Universelles) Element)**.** *Ein* **Element** *eines ko- (bzw. kontra-) varianten, mengenwertigen Funktors F induziert durch die Kategorie C ist ein Objekt c zusammen mit einem Element $x \in Fc$. Ein Element heißt* **universell***, falls die natürliche Transformation $\alpha_x : C(c, -) \Longrightarrow F$ aus dem Yoneda-Lemma mit $\alpha_x(\mathrm{id}_c) = x$ ein natürlicher Isomorphismus ist. In diesem Fall stellt c F dar und α_x definiert eine Darstellung für F.*

Bemerkung 2.13 (zu Definition 2.12)**.**

- Im Unterschied zu Definition 1.1 stellt das universelle Element stark konstruktive (und wie wir später feststellen werden / oder in Kapitel §2.2 bereits festgestellt haben, alle wesentlichen) Informationen über den dargestellten Funktor F bereit.

2.14 Konklusion

Wir wollen noch einmal explizit die Fragen gestellt in Bemerkung 2.7 beantworten:

Bemerkung 2.15 (zu Bemerkung 2.7)**.**

zu 1.: Stellen zwei Objekte denselben Funktor F dar, so sind sie eindeutig isomorph zueinander. Jeder darstellbare Funktor $F : C \to \mathbf{Set}$ ist also eindeutig dargestellt bis auf Isomorphie.

zu 2.: Bereits beantwortet in §2.2 Yoneda Lemma, nämlich ein einziges Objekt in Fc

zu 3.: Eine abschließende Antwort liefert der letzte Teil des Vortrags, und die lautet: Sie sind dieselbe Sache, nur in einer anderen Kategorie. Korollar 2.4 hat bereits erkannt, dass initial und terminal Spezialfälle einer Äquivalenz von Darstellbarkeit sind. Gilt auch die Umkehrung?

2.16 Beispiele

Beispiel 2.17. (Vergissfunktor I)**.** Der Vergissfunktor $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ wird dargestellt durch das universelle Element $\mathbb{Z}[x]$ mit $x \in \mathbb{Z}[x]$.

$$\mathbf{Ring}(\mathbb{Z}[x], R) \cong UR$$

Beispiel 2.18. (G-Torsor)**.** Sei $E : \mathrm{B}G \to \mathbf{Set}$ ein Funktor, zum Beispiel eine linke G-Menge / eine Linkswirkung $E \curvearrowright X$. E ist genau dann darstellbar, wenn es einen Isomorphismus $G \cong E$ von linken G-Mengen gibt. Das heißt E ist

1. frei. $\mathrm{Stab}(x) = \{\mathbb{1}\}$ für alle $x \in E$
2. transitiv. $\mathrm{Orb}(x) = G$ für alle $x \in E$
3. nichtleer. $E \neq \emptyset$

Umgekehrt ist jede nicht-leere transitive und freie linke G-Menge isomorph zu G. Nach dem Yoneda Lemma ist ein Isomorphismus $G \cong E$ bestimmt durch die Wahl eines Elements $e \in E$ als Bild von $e \in G$ unter der natürlichen Isomorphie. So gesprochen, ist eine darstellbare linke G-Menge E eine Gruppe, die ihr neutrales Element vergessen hat. Wir nennen so etwas einen G-Torsor. Wir haben beispielsweise $\mathbb{A}^n \cong \mathbb{R}^n$, der n-dim. affine Raum, der anschaulich ein $\mathbb{R}^n$ ohne Ursprung o ist.

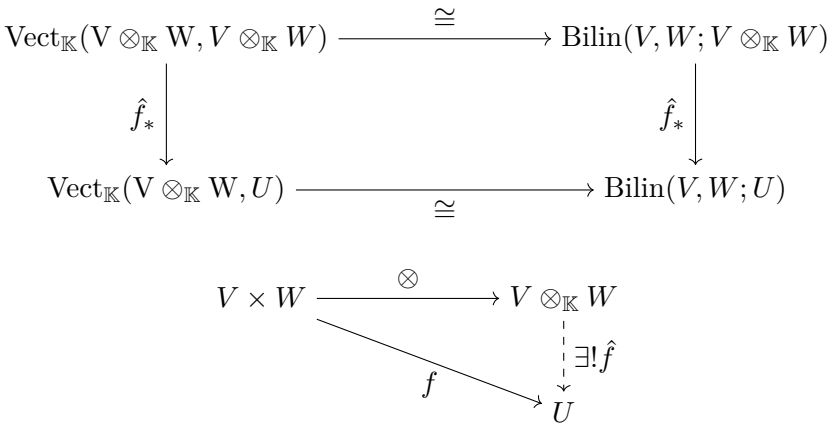
Beispiel 2.19. (Tensorprodukt)**.** Seien V, W fixe $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann betrachte man den Funktor:

$$\mathrm{Bilin}(V, W; -) : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}$$

der jedem Vektorraum $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}})$ seine bilinearen Abbildungen $V \times W \to U$ zuordnet (und jedem [Vektorraum-Homo-]Morphismus f seine Postkomposition f_*) Dieser Funktor wird repräsentiert, wer hätte es gedacht, von dem folgenden ausgezeichneten Vektorraum: $V \otimes_{\mathbb{K}} W$, dem Tensorprodukt von V und W. Seine Definition IST auch gleich der folgende (in U) natürliche Isomorphismus:

$$\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}(V \otimes_{\mathbb{K}} W, U) \cong \mathrm{Bilin}(V, W; U)$$

Nach dem Yoneda-Lemma ist dieser natürliche Isomorphismus bestimmt durch ein universelles Element aus $\mathrm{Bilin}(V, W; V \otimes_{\mathbb{K}} W)$, also einer bilinearen Abbildung - wir nennen sie $\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W$. Damit ist das Tensorprodukt nichts anderes als der **universelle Vektorraum** ausgerüstet mit einer **bilinearen Abbildung aus** $V \times W$ heraus. Auch hier hilft das Yoneda-Lemma wieder dabei, das ganze zu entwirren. Dieser natürliche Isomorphismus identifiziert jegliche bilineare Abbildung $f : V \times W \to U \in \mathrm{Bilin}(V, W; U)$ mit einer linearen Abbildung $\hat{f} : V \otimes_{\mathbb{K}} W \to U$. Dazu betrachte man das Naturalitätsquadrat: Verfolgt man $\mathrm{id}_{V \otimes_{\mathbb{K}} W}$ entlang dieses Diagramms bemerkt man, dass sich die ursprüngliche bilineare Abbildung f faktorisiert durch das folgende uns schon wohlbekannte Diagramm:



Bemerkung 2.20 (zu Beispiel 2.16)**.**

- Jede bilineare Abbildung von $V \times W \to U$ ist eine lineare Abbildung $\hat{f}$ präkomponiert mit der universellen bilinearen Abbildung $\otimes$. Das sagt uns, dass $\otimes$ in einer bestimmten Kategorie (die wir gleich kennenlernen werden) **initial** ist.
- Mithilfe dieser universellen Eigenschaft können wir ebenfalls die konstruktive Definition beweisen, die wir für $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ haben. Man beachte hierzu nur, dass die Isomorphie $V \otimes_{\mathbb{K}} W \cong \langle v \otimes w \rangle_{v \in V, w \in W} = \mathrm{im} \otimes$ zu beweisen ist (Betrachte die Quotienten-Abbildung...)

Die Natürlichkeit dieser Isomorphie erlaubt es, sehr nützliche Beziehungen zu beweisen, ohne konkrete Basen zu wählen.

Lemma 2.21. *Für jedes Paar an $\mathbb{K}$-Vektorräumen V, W gilt*

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W \cong W \otimes_{\mathbb{K}} V$$

Beweis. Übung. (Lösung: Zeige

$$\mathrm{Bilin}(V, W; U) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bilin}(W, V; U), f \mapsto f\#$$

mit $f\#(w, v) := f(v, w)$ ist ein natürlicher Isomorphismus. Komposition mit den natürlichen Isomorphismen aus Beispiel 2.16 ergibt

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{W}, -) \cong \mathrm{Bilin}(V, W; -) \cong \mathrm{Bilin}(W, V; -) \cong \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathrm{W} \otimes_{\mathbb{K}} \mathrm{V}, -)$$

und nach Korollar 2.10 muss dieser natürliche Isomorphismus zwischen Funktoren aus einer eindeutigen Isomorphie in der Ursprungskategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ kommen. Also $V \otimes_{\mathbb{K}} W \cong W \otimes_{\mathbb{K}} V$) □

3 The Category of Elements

3.1 Motivation

Was uns bis jetzt bekannt ist:

Bemerkung 3.2.

- Ein Objekt $c \in \mathrm{Ob}(C)$ kann entweder eine "mapping-in" oder "mapping-out" universelle Eigenschaft oder beides haben; jeweils dargestellt durch einen kontra- oder kovarianten Funktor $C(-,c)/C(c,-)$
- Ein universelles Objekt c mit einem universellen Element $x \in Fc$ klassifiziert den natürlichen Isomorphismus $F \cong C(c,-)/C(-,c)$

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass diese Definition von Universalität konsistent ist mit der traditionellen Bedeutung dieses Worts, und zwar:

> "Ein universelles Element ist initial und/oder terminal in einer angemessenen Kategorie."

Die hier angesprochene "angemessene Kategorie", genannt die **Kategorie der Elemente**, wird auf kanonische Weise aus den Informationen des dargestellten Funktors konstruiert.

Definition 3.3. (Kategorie der Elemente, K.d.E.)**.** *Die Kategorie der Elemente $\int F$ eines kovarianten Funktors $F : C \to \mathbf{Set}$ hat*

i) als Objekte die Elemente von F, also Paare der Form (c,x) mit $c \in \mathrm{Ob}(C)$ und $x \in Fc$.

ii) als Morphismen $(c,x) \to (c',x')$ solche der Form $f : c \to c'$ aus C, sodass $Ff(x) = x'$

Die Kategorie der Elemente hat einen offensichtlichen Vergissfunktor $\Pi : \int F \to C$ mit

$$\Pi|_{\mathrm{Ob}(\int F)} : (c,x) \longmapsto c \quad \Pi|_{\mathrm{hom}(\int F)} : f \longmapsto f$$

Bemerkung 3.4 (zu Definition 3.3)**.**

- für kontravariante Funktoren $F : C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ dualisieren wir nicht einfach rigoros, sondern wollen eine kleine Feinheit festhalten, nämlich:

$$(c,x) \in \mathrm{Ob}\left(\int F\right) \quad \text{für die Elemente von } \int F \text{ und}$$
$$(c,x) \to (c',x') \quad \text{als Morphismen aus } f : c \to c', \text{ sodass } Ff(x') = x$$

Beispiel 3.5. (Vergissfunktor II)**.** Für eine konkrete Kategorie C besteht die Kategorie der Elemente des Vergissfunktors $U : C \to \mathbf{Set}$ aus den Bestandteilen

1. als Objekte jeweils für jedes Objekt $c \in C$ alle Paare (c, x), wobei $x \in Uc$ ein strukturell befreites Element von c ist.

2. als Morphismen jeweils alle Morphismen in C, die in $\int U$ das ausgewählte Element erhalten.

Bemerkung 3.6 (zu Beispiel 3.5)**.** Wir notieren im Allgemeinen für jede konkrete Kategorie C

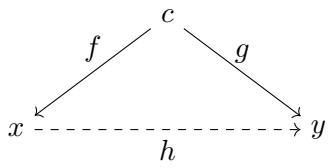
$$C_* :\Longleftrightarrow \int U$$

als die Kategorie der **markierten Objekte**.

Beispiel 3.7. (Schnitt-Kategorie / Slice - Category)**.** Sei C wieder lokal klein. Dann betrachte man die Kategorie der Elemente von $C(c, -)$, also $\int C(c, -)$. Diese besitzt

1. als Objekte Paare (x, f) mit $x \in \mathrm{Ob}(C)$ und $f : c \to x \in C(c, x)$ ein Morphismus aus dieser Menge. Da x ja bereits als Information in f drinsteckt, spricht man meist auch nur von $f : c \to x$ als Objekte dieser Kategorie.

2. als Morphismen $(x, f) \to (y, g)$ jeweils $h : x \to y \in C(x, y)$, sodass $h \circ f = g$; also dass das Dreieck



und für $C(-, c)$ die duale Analogie. Wir bezeichnen $c/C :\Leftrightarrow \int C(c, -)$ als die Schnitt-Kategorie **unter c** und mit $C/c :\Leftrightarrow \int C(-, c)$ die Schnittkategorie **über c**.

Bemerkung 3.8 (zu Beispiel 3.7)**.** Bemerke hier, dass $C(-, c) \cong C^{\mathrm{op}}(c, -) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ sowie $c/C^{\mathrm{op}} \cong (C/c)^{\mathrm{op}}$

Das Yoneda Lemma liefert uns noch eine alternative Definition zur Kategorie der Elemente.

3.9 Zentrale Resultate

Lemma 3.10. (Äquivalenz K.d.E. und Komma-Kategorie)**.** *Die Kategorie der Elemente eines Funktors $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ ist isomorph zur Komma Kategorie*

$$\int F \cong \mathcal{Y} \downarrow F$$

relativ zur Yoneda Einbettung $\mathcal{Y} : C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ und dem Objekt $F : \mathbb{1} \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$

Bemerkung 3.11. Die Komma-Kategorie für zwei Funktoren $F : X \to C,\ G : Y \to C$ mit übereinstimmender Co-Domain war definiert als

$$\mathrm{Ob}(F \downarrow G) \ni (a, b, h) \quad a \in X,\ b \in Y,\ h : F(a) \to G(b) \in C$$

$$\hom(F \downarrow G) \ni (\phi, \psi) : (a, b, h) \to (a', b', h') \quad \phi \in X(a, a'),\ \psi \in Y(b, b')$$
$$h' \circ F(\phi) = G(\psi) \circ h$$

Für Lemma 3.8 bemerke man zusätzlich, dass bei $G : \mathbb{1} \to C,\ G(*) = c,\ G(\mathrm{id}_*) = \mathrm{id}_c$ sich folgendes auf triviale Weise verkürzt:

$$\mathrm{Ob}(F \downarrow G) \ni (a, *, h) \rightsquigarrow (a, h)$$

$$\hom(F \downarrow G) \ni (\phi, \mathrm{id}_c) \rightsquigarrow \phi$$

Beweis. Idee: Betrachte zunächst die Kategorie $\mathcal{Y} \downarrow F$:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{Y} \downarrow F) \ni (x, \alpha) \quad x \in C,\ [\alpha : C(-, x) \Rightarrow F] \in \hom(\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}})$$

oder kurz $\mathrm{Ob}(\mathcal{Y} \downarrow F) \ni \alpha$, weil x als Information in der Domain von α bereits drinsteckt.

$$\hom(\mathcal{Y} \downarrow F) \ni \phi : (x, \alpha) \to (y, \alpha') \quad \phi \in C(x, y)$$

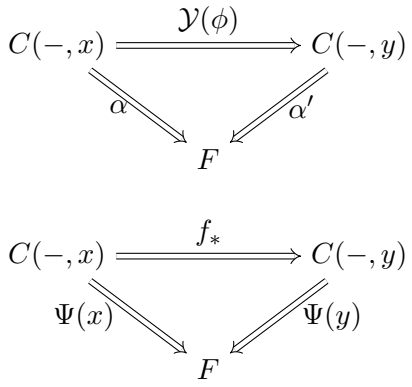
sodass

$$\alpha' \circ \mathcal{Y}(\phi) = \alpha$$

beziehungsweise das Dreieck kommutiert.

Nach dem Yoneda Lemma korrespondieren $c \in Fx \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ bijektiv mit der Menge der natürlichen Transformationen $\Psi(x) : C(-, x) \Rightarrow F$. Das bereits liefert uns eine Isomorphie zwischen den Objekten von $\int F$ zu $\mathcal{Y} \downarrow F$.

$$\mathrm{Ob}\left(\int F\right) \ni (x, c) \mapsto (x, \alpha) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Y} \downarrow F)$$



Nun gilt es noch zu überprüfen, dass diese Isomorphie volltreu ist, also dass

$$\hom\left(\int F\right) \ni f \mapsto f_* \in \hom(\mathcal{Y} \downarrow F)$$

jeweils die Dreiecke:
kommutieren. Allerdings ist die Isomorphie im Yoneda Lemma natürlich in c und in F und das liefert bereits alles. □

Die Kategorie der Elemente kann nun genutzt werden, um existenzielle Aussagen über universelle Eigenschaften zu treffen.

Satz 3.12. (Univers. Elemente sind Univers. Elemente)**.** *Für einen kovarianten Funktor $F : C \to \mathbf{Set}$ gilt: Ein Element (c, x) ist genau dann ein universelles Element, wenn das Objekt $(c, x) \in \int F$ initial ist. Daher ist F genau dann darstellbar, falls die Kategorie der der Elemente $\int F$ ein initiales Objekt besitzt. (Dual gilt für $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ die gleiche Bedinung mit terminal statt initial.)*

Beweis. (nur für kovariant) Die Hinrichtung "$\Longrightarrow$" ist recht offensichtlich. Ein universelles Element induziert eine natürliche Isomorphie $C(c,-) \cong F$, die wiederum eine Isomorphie $\int F \cong \int C(c,-) =: c/C$ von Kategorien bewirkt. Und die letztere Schnittkategorie c/C über c hat ein initiales Objekt; nämlich die Identität id_c.

Die interessante Richtung ist die Rückrichtung "$\Longleftarrow$". Diese ist allerdings einfach nur eine Aneinanderknüpfung von vorangehenden Erkenntnissen:

1. Nach Definition 2.12

$$x \in Fc \text{ universell} \Leftrightarrow \Psi(x) : C(c,-) \Rightarrow F \text{ natürlicher Isomorphismus}$$

2. Nach Definition §1.4.3

$$\Psi(x) \text{ natürlicher Iso.} \Leftrightarrow \forall d \in C \;\; \Psi(x)_d : C(c,d) \to F \text{ Iso.}$$

$$\Longleftrightarrow \Psi(x)_d \text{ ist Bijektion } \forall d \in C$$

3. Das führt zu der Äquivalenz

$$x \in Fc \text{ universell} \Leftrightarrow \forall d \in C \;\; \forall y \in Fd \;\; \exists! f : c \to d \text{ mit } \Psi(x)_d(f) = y$$

4. Nach Konstruktion im Yoneda Lemma Satz 1.3 gilt $\Psi(x)_d(f) := Ff(x)$, also

$$x \in Fc \text{ universell} \Leftrightarrow \forall d \in C \;\; \forall y \in Fd \;\; \exists! f : c \to d \text{ mit } Ff(x) = y$$

5. Und das bedeutet in der Sprache der K.d.E nichts anderes als

$$x \in Fc \text{ universell} \Leftrightarrow \forall (d,y) \in \mathrm{Ob}\left(\int F\right) \;\; \exists! f : (c,x) \to (d,y)$$

$$\Longleftrightarrow (c,x) \in \int F \text{ ist initial}$$

□

3.13 Konklusion

Bemerkung 3.14 (Darstellungen sind kategoriell eindeutig)**.** Wir haben gezeigt:

1. Nach Definition 1.1 besteht eine Darstellung für F aus einem Objekt $c \in C$ und einem natürlichen Isomorphismus $C(c,-) \overset{\cong}{\Longrightarrow} F$
2. Nach Definition 2.12 besteht eine Darstellung für F aus einem Objekt $c \in C$ zusammen mit einem universellen Element $x \in Fc$
3. Nach Satz 3.12 ist eine Darstellung für F genau das initiale Objekt in $\int F$

Konklusion: Darstellungen können auf verschiedene Weisen passieren, sind also nicht eindeutig im klassischen mengentheoretischen Sinn, im Kategorientheoretischen Sinn aber schon!

Korollar 3.15. *Für jeden Funktor $F : C \to$* **Set** *ist die von den Darstellungen von F aufgespannte Unterkategorie in $\int F$ leer oder ein kontrahierbarer Gruppoid.*

Beweis. Falls F nicht darstellbar ist, gibt es keine Darstellungen also ist die Unterkategorie leer. Andernfalls sind die Darstellungen von F initiale Objekte in der Kategorie $\int F$. Und da nach Satz 2.9 zwei gleiche Darstellungen eindeutig isomorph zueinander sind, ist diese Unterkategorie dann ein Gruppoid. □

3.16 Beispiele

Beispiel 3.17. (Potenzmengenfunktor)**.** Der Potenzmengenfunktor war gegeben durch:

$$\mathscr{P} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad A \mapsto \{A' \mid A' \subset A\},$$

$$[f : A \to B] \mapsto [f_{\mathscr{P}} : P(B) \to P(A),\ B' \mapsto f^{-1}(B')]$$

Die Objekte der Kategorie der Elemente $\int \mathscr{P}$ sind also

$$\mathrm{Ob}\left(\int \mathscr{P}\right) \ni (A, A')$$

Paare von Mengen mit ausgezeichneten Teilmengen. Ein Morphismus

$$\mathrm{hom}\left(\int \mathscr{P}\right) \ni f\colon (A' \subset A) \to (B' \subset B)$$

ist eine Funktion $f\colon A \to B$ mit $f^{-1}(B') = A'$. Das terminale Objekt, das der in Beispiel 2.1.6 [Riehl, E.: Category Theory in Context] beschriebenen Darstellung entspricht, ist die zweielementige Menge $\Omega := \{\top, \bot\}$ zusammen mit der ausgezeichneten einelementigen Teilmenge $\{\top\} \subset \Omega$. Dies ist die universelle Menge mit einer Teilmenge: für jedes $A' \subset A$ gibt es genau eine Funktion $h\colon A \to \Omega$ mit $h^{-1}(\top) = A'$. Man beachte, dass $\{\top\} \subset \Omega$ nicht das einzige terminale Objekt der Kategorie der Elemente ist; es ist isomorph zu $\{\bot\} \subset \Omega$ und zu jeder anderen einelementigen Teilmenge einer zweielementigen Menge.

Beispiel 3.18. (Bilineare Abbildungen)**.** Der Funktor der bilinearen Abbildungen war gegeben durch:

$$\mathrm{Bilin}(V, W; -) : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Set}, \quad U \mapsto \{f : V \times W \to U \mid f \text{ bilinear}\}$$

$$[T : U \to U'] \mapsto [T_* : \mathrm{Bilin}(V, W; U) \to \mathrm{Bilin}(V, W; U'),\ f \mapsto T \circ f]$$

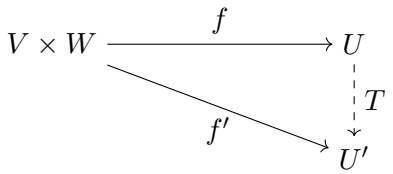
Die Objekte der Kategorie der Elemente $\int \mathrm{Bilin}(V, W; -)$ sind also

$$\mathrm{Ob}\left(\int \mathrm{Bilin}(V, W; -)\right) \ni (U, f)$$

$\mathbb{K}$-Vektorräume zusammen mit einer ausgezeichneten bilinearen Abbildung aus $V \times W$. Ein Morphismus

$$\mathrm{hom}\left(\int \mathrm{Bilin}(V, W; -)\right) \ni T\colon (U, f) \to (U', f')$$

ist eine lineare Abbildung $T : U \to U'$ mit $T \circ f = f'$, sodass also das Diagramm kommutiert. Die in Beispiel 2.3.9 [Riehl, E.: Category Theory in Context] beschriebene universelle Eigenschaft der universellen bilinearen Abbildung $\otimes : V \times W \to V \otimes_{\mathbb{K}} W$ besagt genau, dass $\otimes$ initiales Objekt dieser Kategorie ist.



Beispiel 3.19. (Vergissfunktor auf Ringen)**.** Der Vergissfunktor war gegeben durch:

$$U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}, \quad R \mapsto |R|$$

$$[\varphi : R \to S] \mapsto [\varphi : |R| \to |S|]$$

(wobei $|R|$ die zugrundeliegende Menge des Rings R bezeichnet). Die Objekte der Kategorie der Elemente $\int U$ sind also

$$\mathrm{Ob}\left(\int U\right) \ni (R, r)$$

Paare aus einem unitären Ring und einem ausgezeichneten Element. Ein Morphismus

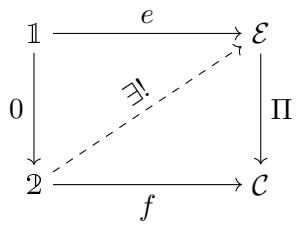
$$\mathrm{hom}\left(\int U\right) \ni \varphi\colon (R, r) \to (S, s)$$

ist ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ mit $\varphi(r) = s$. Das initiale Objekt, das der in Beispiel 2.1.5(v) [Riehl, E.: Category Theory in Context] beschriebenen Darstellung entspricht, ist der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ mit dem ausgezeichneten Element $x \in \mathbb{Z}[x]$.
In der Kategorie der Elemente besitzt $(\mathbb{Z}[x], x)$ keine Endomorphismen außer der Identität — initiale Objekte besitzen grundsätzlich keine. Der Ring $\mathbb{Z}[x]$ hat hingegen viele Endomorphismen in der Kategorie der Ringe: die universelle Eigenschaft $\mathbf{Ring}(\mathbb{Z}[x], -) \cong U$ besagt, dass Abbildungen $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$ durch Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten klassifiziert werden, und zwar durch die Elemente $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Nach Korollar 2.2.8 [Riehl, E.: Category Theory in Context] müssen demnach alle natürlichen Endomorphismen von $U : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$ Komponentenfunktionen $R \to R$ dieser Gestalt besitzen, d.h., die Komponente eines jeden natürlichen Endomorphismus von Ringen ist eine Abbildung $p(x) : R \to R$, $r \mapsto p(r)$, wobei p ein ganzzahliges Polynom ist.

Bemerkung 3.20 (zu Bemerkung 2.15)**.** Wir beantworten nun auch die letzte offene Frage aus 2.15

> "Jede universelle Eigenschaft wird dargestellt durch ein universelles Element das initial oder terminal in der K.d.E. ist. Insbesondere ist ein Funktor genau dann darstellbar / codiert eine universelle Eigenschaft, wenn die K.d.E. ein initiales bzw. terminales Objekt gibt."

Ausblick: Diskrete Fibrationen Eine naheliegende Folgefrage am Ende von §2.4 ist: welche Funktoren $\Pi : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ tauchen eigentlich als Projektionen $\int F \to \mathcal{C}$ aus einer Kategorie von Elementen auf? Die Antwort liefert der Begriff der **diskreten Links-Fibration**: ein Funktor Π, bei dem sich jeder Morphismus $f : c \to c'$ in $\mathcal{C}$ über jedes vorgegebene Liften des Quellobjekts $e \in \mathcal{E}$ mit $\Pi(e) = c$ eindeutig zu einem Morphismus in $\mathcal{E}$ hochheben lässt. Bildlich gesprochen ist das die Forderung, den gestrichelten Pfeil im folgenden Diagramm eindeutig einsetzen zu können:



Hier ist $\mathbb{1}$ die terminale Kategorie und $\mathbb{2}$ die Intervall-Kategorie. Dual definiert man **diskrete Rechts-Fibrationen**, bei denen das Zielobjekt vorgegeben ist.
Proposition §2.4.14 macht daraus eine Äquivalenz: die Konstruktion $F \mapsto \int F$ identifiziert kovariante mengenwertige Funktoren auf $\mathcal{C}$ mit diskreten Links-Fibrationen über $\mathcal{C}$ (und entsprechend kontravariante mit Rechts-Fibrationen). Die Kategorie der Elemente erhält damit eine zweite, rein "geometrische" Beschreibung — nicht über einen Funktor, sondern als pure Lifting-Eigenschaft. Dieser Standpunkt ist zugleich der Einstieg in die allgemeine Theorie der Grothendieck-Fibrationen.

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. U. Krähmer; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. U. Krähmer; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.