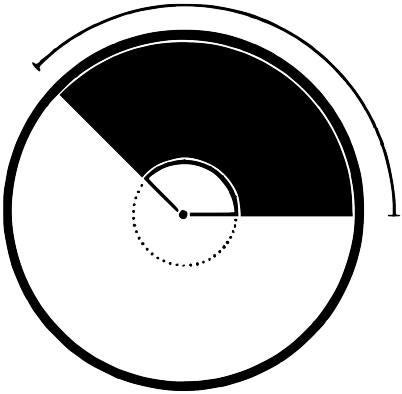
"Es ist so, weil es so ist." $\sim$ Frau R.



Konstrukt der Mathematik

Moritz Schirrmacher
Janek Zeiger
Leonard Simon

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Die automatisierte Analyse des Werkes, um daraus Informationen insbesondere über Muster, Trends und Korrelationen gemäß §44b UrhG („Text und Data Mining“) zu gewinnen, ist untersagt.

© 2024 Schirrmacher - Zeiger - Simon

Verlag:
BoD · Books on Demand GmbH
In de Tarpen 42, 22848 Norderstedt

Druck:
Libri Plureos GmbH
Friedensallee 273, 22763 Hamburg

ISBN: 9-783759-766663

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **11**

1 Einleitung **13**
1.1 Die Eulersche Zahl e 13
1.2 Die Kreiszahl π 14
1.3 Die imaginäre Einheit i 15

I magna mathematica - generalis **17**

2 Analysis - Grenzwerte **19**
2.1 Stetigkeitskriterium 20
2.2 ε-δ Kriterium der Stetigkeit 22
2.3 Grenzwertsätze 23
2.3.1 Addition von Grenzwerten 24
2.3.2 Multiplikation von Grenzwerten 25
2.4 Regel von de L'Hospital 26

3 Analysis - Differentialrechnung **29**
3.1 Differenzierbarkeit 31
3.2 Beweise ausgewählter Ableitungen 32
3.2.1 Ableitung einer Konstante 32
3.2.2 Ableitung der Identität 34

3.2.3 Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion 34
3.2.4 Ableitung des natürlichen Logarithmus 35
3.2.5 Ableitung der Sinusfunktion 36
3.2.6 Ableitung der Kosinusfunktion 37
3.2.7 Ableitung der Tangensfunktion 38
3.3 Beweise der Ableitungsregeln 39
3.3.1 Summenregel 39
3.3.2 Faktorregel 40
3.3.3 Reziproke Regel 41
3.3.4 Potenzregel 41
3.3.5 Kettenregel 45
3.3.6 Produktregel 45
3.3.7 Quotientenregel 46

4 Analysis - Integralrechnung 47
4.1 Geschichte 48
4.2 Fundamentalsatz der Analysis 49
4.3 Bestimmtes Integral 51
4.3.1 Eigenschaften des bestimmten Integrals 54
4.3.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . 55
4.4 Unbestimmtes Integral 56
4.4.1 Zusammenhang mit dem bestimmten Integral 56
4.5 Rechenregeln zur Bestimmung v. Stammfunktionen 58
4.5.1 Potenzregel 58
4.5.2 Partielle Integration 62
4.5.3 Substitutionsverfahren 63
4.6 Beweise ausgewählter Stammfunktionen 71
4.6.1 Stammfunktion der Konstante 71
4.6.2 Stammfunktion der Identität 72

4.6.3 Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion . . . 73
4.6.4 Stammfunktion des Reziproken der Identität . . . 75
4.6.5 Stammfunktion der Sinusfunktion . . . 77
4.6.6 Stammfunktion der Kosinusfunktion . . 78
4.6.7 Stammfunktion der Tangensfunktion . . 79
4.7 Bogenlänge und Rotationsvolumen . . . 79
4.8 Beweis ausgewählter Volumensformeln . . . 81
4.8.1 Kegel . . . 81
4.8.2 Kugel . . . 82
4.8.3 Pyramide . . . 83
4.9 Numerische Quadratur . . . 84
4.9.1 Graphische Verfahren . . . 84
4.9.2 Rechnerische Verfahren durch Quadraturformeln . . . 84
4.9.3 Polynominterpolation . . . 88

5 Lineare Algebra - Geometrie 91
5.1 Ebene und Raum . . . 91
5.2 HILBERTs axiomatische euklidische Geometrie . 92
5.2.1 Axiome der Inzidenz . . . 93
5.2.2 Axiome der Anordnung . . . 94
5.2.3 Axiome der Kongruenz . . . 95
5.2.4 Axiom der Parallelen . . . 98
5.2.5 Axiome der Stetigkeit . . . 98
5.3 Koordinatensysteme . . . 100
5.4 Flächen . . . 102
5.4.1 Kreis . . . 102
5.4.2 Dreieck . . . 110
5.5 Vektoren . . . 119
5.5.1 Lineare Abhängigkeit . . . 122
5.5.2 Euklidische Norm eines Vektors . . . 122

5.5.3 Inhalt eines n-Parallelotops 123
5.5.4 Verknüpfen von Vektoren 124
5.6 Geraden 131
5.7 Ebenen 133
5.8 Lagebeziehungen zwischen Objekten des Raumes 137
5.9 Abstände zwischen Objekten des Raumes . . . 139

6 Lineare Algebra - Matrizen 145
6.1 Matrizen 145
6.1.1 Formale Definition 146
6.1.2 Einheitsmatrix 147
6.1.3 Operationen mit sich selbst 148
6.1.4 Matrizenaddition und -multiplikation . 149
6.1.5 Determinante 152
6.1.6 Geometrische Interpretation der Determinante 156
6.2 Lineare Transformation 158
6.3 Cramer'sche Regel 162

7 Stochastik 167
7.1 Kombinatorik 167
7.1.1 Die Fakultät 168
7.1.2 Permutationen 168
7.1.3 Variationen 169
7.1.4 Kombinationen 170
7.1.5 Binomialkoeffizient 173
7.2 Wahrscheinlichkeitstheorie 174
7.2.1 Grundlegende Begriffe 175
7.2.2 Laplace-Versuche 178
7.2.3 Mehrstufige Zufallsversuche 179
7.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Stochastische Unabhängigkeit 182
7.2.5 Bernoulli-Ketten 183
7.3 Statistische Stochastik 186

7.3.1 Arithmetisches Mittel 187
7.3.2 Erwartungswert 188
7.3.3 Varianz 190
7.3.4 Standardabweichung 191
7.3.5 Normalverteilung 192

II superiore mathematica - apocryphus 199

8 Logik 201
8.1 Aussagenlogik 202
8.1.1 Negation 202
8.1.2 Konjunktion 202
8.1.3 Disjunktion 203
8.1.4 Implikation 203
8.1.5 Wahrheitstafeln 204
8.1.6 Äquivalenz 207
8.1.7 Priorität 207
8.2 Prädikatenlogik 207
8.2.1 Allquantor 208
8.2.2 Existenzquantor 209

9 Mengenlehre 211
9.1 Notationen 212
9.1.1 Aufzählende Notation 212
9.1.2 Beschreibende Notation 213
9.1.3 Mächtigkeit und Kardinalität 213
9.2 Besondere Mengen 214
9.2.1 Teilmenge 214
9.2.2 Obermenge 214
9.2.3 Leere Menge 214
9.2.4 Schnittmenge 215
9.2.5 Vereinigungsmenge 216
9.2.6 Differenz und Komplement 217

9.2.7 Symmetrische Differenz 218
9.2.8 Potenzmenge 218
9.3 Verknüpfungen von Mengen 220
9.3.1 Geordnetes Paar 220
9.3.2 Kartesisches Produkt 221
9.3.3 Relation und Funktion 221
9.4 Gesetzmäßigkeiten 223
9.4.1 Kommutativgesetz 223
9.4.2 Assoziativgesetz 224
9.4.3 Distributivgesetz 224
9.5 Algebraische Strukturen 226
9.5.1 Klassifizierung 226

10 Reihen und Summen 229
10.1 Konvergenzkritirium 230
10.2 Rechenregeln für Summen 231
10.3 TAYLORreihen 233
10.3.1 TAYLORreihe der Sinusfunktion 234
10.3.2 TAYLORreihe der Kosinusfunktion . . . 237
10.4 Binomischer Lehrsatz 238

11 Komplexe Zahlen 243
11.1 Rechenregeln 244
11.1.1 Potenzen der imaginären Einheit 244
11.1.2 Addition und Multiplikation 245
11.2 EULER'sche Formel und Identität 245
11.3 Additionstheoreme 246

III glossarium 249
Mathematische Symbole 251

Widmung 263

Vorwort

In Folge einer zufällig entdeckten gemeinsamen Leidenschaft für die Mathematik und einer ebenso geteilten Leidensgeschichte im Deutschunterricht schlossen sich die drei Mathematik-Leistungskursler Moritz Schirrmacher, Janek Zeiger und Leonard Simon zusammen, um ihre Freude an Logik und Kohärenz zu bündeln und diese Sammlung an Beweisen zusammenzutragen.

Dieses Werk gliedert sich in zwei größere Abschnitte. Im ersten, dem "magna mathematica - generalis", werden insbesondere Inhalte, die wir in der Oberstufe behandelten, tiefgründiger ausgeführt, hergeleitet und bewiesen. Der zweite Abschnitt "superiore mathematica - apocryphus" ergänzt den ersten Teil um die Bereiche, die in der gymnasialen Oberstufe nicht explizit diskutiert werden. Sie können weitaus elementarer, aber auch überaus spezifischer sein.

Unser Buch soll einen Einblick darüber geben, wie wir die Mathematik mit unserem jetzigen Wissensstand wahrnehmen. Aus diesem Grund ist die Formalität nicht immer dem wissenschaftlichen Standard entsprechend, sondern auf die Balance zwischen Verständlichkeit und Akkuratesse ausgerichtet. In diesem Sinne reden wir bei dieser Sammlung auch nicht von Fachliteratur, sondern eher von akkumulierten Notizen.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Eulersche Zahl e

Die Eulersche Zahl e gehört zu den bedeutendsten Konstanten der Mathematik. Sie wurde nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler benannt, welcher zahlreiche Eigenschaften von e beschrieb. Gelegentlich wird sie auch nach dem schottischen Mathematiker John Napier als Napiers Konstante (oder Nepersche Konstante) bezeichnet. Es gibt eine Vielzahl äquivalenter Definitionen von e. Euler selbst definierte e erstmals über die Reihe:

$$\begin{aligned} e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist dabei $n!$ die Fakultät von n und es ist zu beachten, dass die Fakultät von $0! = 1$ ist. Ebenfalls definierte Euler e als Grenzwert der Folge $a_n, n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Die Eulersche Zahl ist unter anderem die Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion. Sie ist eine transzendente Zahl; das heißt eine Zahl, die die folgende Gleichung nie erfüllt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \quad a_k \in \mathbb{Z}, n \geq 1$$

In Worten ausgedrückt ist jene Zahl transzendent, welche niemals Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten a_k ist. Das Gegenteil, also eine nicht-transzendente Zahl, wird algebraische Zahl genannt. Darüber hinaus ist jede transzendente Zahl irrational. Das heißt, dass sie nicht vollständig als Dezimalzahl oder Bruch dargestellt werden kann. Eine dezimale Näherung an e lautet:

$$e \approx 2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,02874\,71352\,66249\,77572\,\ldots$$

1.2 Die Kreiszahl π

Die wohl berühmteste mathematische Konstante ist die Kreiszahl π. Selten wird sie auch Ludolf'sche Zahl genannt. Bereits in der Antike tauchte diese irrationale und transzendente Zahl auf als konstantes Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises, das auf die Ähnlichkeit jedes Kreises zurückzuführen ist. Man ging lange Zeit davon aus, dass π nur geometrische Bedeutungen hat. Erst im 18. Jahrhundert entdeckten Mathematiker auch analytische Bedeutungen von π. Leonhard Euler bewies beispielsweise, dass einige mathematische Reihen zu einem Wert konvergieren, der π bein-

haltet; z. B. die Folgende:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + ... = \frac{\pi^2}{6}$$

In der Praxis wie beispielsweise der klassischen Physik werden meist nur die ersten drei Stellen von π verwendet. Für quantitativ präzisere Antworten ist jedoch eine exaktere Bestimmung von π notwendig: Möglichst viele Nachkommastellen von π zu bestimmen war schon zur Zeit Isaac Newtons eine beliebte wissenschaftliche Herausforderung. Mithilfe von Hochleistungscomputern gelang es Google 2022 einen neuen Rekord für die meist bestimmten Nachkommastellen der Kreiszahl aufzustellen. Über 100 Billionen, also über 100 000 000 000 000 Nachkommastellen, konnten innerhalb von 157 Tagen berechnet werden. Dafür wurden über 82.000 Terabyte an Daten verarbeitet.

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,\ldots$$

1.3 Die imaginäre Einheit i

Für die Mathematik ist eine schon relativ alte Fragestellung bedeutend. Es handelt sich dabei um eine Lösung für die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0.$$

Nach Äquivalenzumformungen ergeben sich zwei Lösungen: $x \in \{-\sqrt{-1}, \sqrt{-1}\}$. Dass Quadratwurzeln aus negativen Zahlen nicht existieren (zumindest nicht im Zahlenkörper der reellen Zahlen) ergibt sich aus der Tatsache, dass das Produkt zweier gleicher Zahlen immer positiv ist. Um ein offensichtlich nicht-lösbares Problem dennoch zu lösen, gilt in der Mathematik der Grundsatz, dieses durch Hinzufügen einer axiomati-

schen Definition zu umgehen. Man definierte im 17. Jahrhundert den Zahlenkörper der imaginären Zahlen $\mathbb{C}$ und $\pm i \in \mathbb{C}$ als die Lösung der oben genannten Gleichung:

$$i := \sqrt{-1}$$

Es gilt die Beziehung $i^2 = -1$ zwischen imaginären und reellen Zahlen. Die Bezeichnung "imaginär" wurde erstmals 1637 von René Descartes benutzt; allerdings vorerst nur für nichtreelle Lösungen algebraischer Polynome höheren Grades. Im Deutschen sagt man häufig auch "komplexe Zahlen", obwohl dieses Adjektiv (wie wir finden) nicht so zu interpretieren ist, dass das Rechnen mit diesen Zahlen besonders anspruchsvoll ist; im Gegenteil: Viele mathematische Probleme können unter Nutzung komplexer Zahlen elegant gelöst werden. Weiteres zu komplexen Zahlen findet sich in Kapitel 11.

Teil I

magna mathematica - generalis

Kapitel 2

Analysis - Grenzwerte

Grenzwerte sind ein Teilgebiet der Analysis und stellen ein wichtiges Instrument bei der Diskussion von Funktionen dar. Mit ihnen lassen sich Eigenschaften wie das Verhalten im Unendlichen, das Verhalten an interessanten Stellen (beispielsweise Definitionslücken) oder das Steigungsverhalten an bestimmten Stellen beurteilen.

Der Grenzwert oder Limes (lat. *limes* - "Grenze") einer reellwertigen Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 ist der Wert, dem sich f an dieser Stelle annähert. Ein Grenzwert existiert nicht in jedem Fall. Existiert er und nähert sich an eine reelle Zahl an, *konvergiert* (lat. *convergere* - "sich hinneigen") die Funktion an dieser Stelle. Andernfalls *divergiert* (lat. *divergere* - "auseinanderstreben") sie. Der Limesoperator lim wird auf f folgendermaßen angewandt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Man liest "Limes für f von x gegen x_0". L ist Element der erweiterten reellen Zahlen $\overline{\mathbb{R}}$. Diese Menge umfasst die Menge der reellen Zahlen erweitert um die unendlichen Elemen-

te Plus- bzw. Minus-Unendlich: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Es ist zu beachten, dass x_0 nicht im Definitionsbereich von f enthalten sein muss. Jedoch muss x_0 ein Häufungspunkt von X oder Plus- bzw. Minus-Unendlich sein. Ein Häufungspunkt einer Menge hat die Eigenschaft, dass sich um diesen unendlich viele weitere Punkte befinden. Diese Bedingung hat beispielsweise zur Folge, dass Grenzwerte für Funktionen des Types $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegen $x_0 \in \mathbb{N}$ nicht definiert sind, da in $\mathbb{N}$ keine Häufungspunkte existieren.

Annäherungen an x_0 können rechtsseitig und linksseitig vorgenommen werden. Es gibt eine Vielzahl Notationen für die rechts- bzw. linksseitige Näherung. Eine häufig vorkommende für rechtsseitige Grenzwerte ist $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ für linksseitige. Die dabei entstehenden Grenzwerte müssen nicht äquivalent sein. Sind sie es doch, existiert für die Funktion an der entsprechenden Stelle ein (äquivalenter) beidseitiger Grenzwert.

> Eine Funktion, bei der der links- und rechtsseitige Grenzwert nicht gleich ist, ist $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 0$:
>
> $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \neq +\infty = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Ist die Näherungsrichtung nicht weiter spezifiziert, spricht man vom beidseitigen Grenzwert.

2.1 Stetigkeitskriterium

f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der beidseitige Grenzwert gegen x_0 existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle

x_0 übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ein Beispiel stellt die Funktion f dar (siehe Abb. 2.1), welche an jeder Stelle bis auf $x = 2$ stetig ist. Hier geht der Grenzwert für $x \to 2$ in beiden Fällen gegen 4, jedoch stimmt der Funktionswert ($f(2) = 0$) an dieser Stelle nicht mit dem Grenzwert überein.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls} \quad x > 2, \\ 0, & \text{falls} \quad x = 2, \\ 6 - x, & \text{falls} \quad x < 2. \end{cases}$$

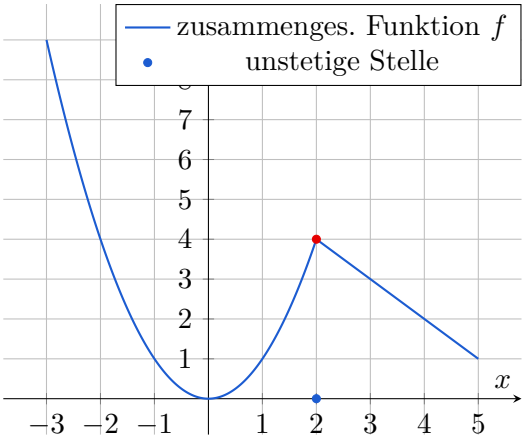


Abb. 2.1: Nichtstetige Funktion

2.2 ε-δ Kriterium der Stetigkeit

Die geläufige Definition des Grenzwertes, dass sich f beliebig nahe an x_0 annähert, ist nach mathematischen Kriterien zu unpräzise. In der modernen Wissenschaft ist die am häufigsten benutzte Definition für die Stetigkeit einer Funktion das von Augustin Louis Cauchy entwickelte ε-δ-Kriterium

Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ ist genau dann stetig an der Stelle $x_0 \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ erfüllt ist. Vollständig in Symbolen ausgedrückt ist das Stetigkeitskriterium folgendermaßen definert:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \Big(\forall x \in \mathrm{X} : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Big)$$

Die Aussage hinter dieser Symbolverschachtelung wird im Kapitel 8 näher erläutert. Intuitiv besagt diese Bedingung, dass für jede vorgegebene Änderung ε als Änderung des Funktionswertes eine maximale Änderung δ des Arguments bestimmt werden kann, die diese Vorgabe garantiert. Für eine Visualisierung siehe Abb. 2.2.

Beispiel: Beweise, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$ an der jeder Stelle x_0 mit $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x+3) - (2x_0+3)| = |2x - 2x_0| = 2|x - x_0|$$

Sei weiterhin $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, dann folgt aus

$$|x - x_0| < \delta = \frac{1}{2}\varepsilon$$

nämlich

$$|f(x) - f(x_0)| = 2|x - x_0| < 2 \cdot \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \square$$

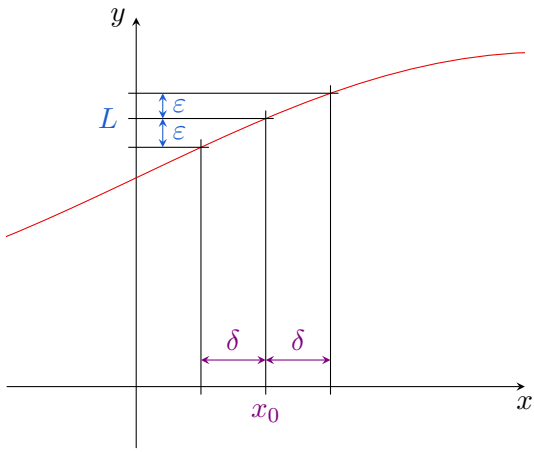


Abb. 2.2: Visualisierung des ϵ-δ-Kriteriums

Eine Funktion nennt man stetig, wenn sie an jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich stetig nach dem ε-δ-Kriterium ist.

2.3 Grenzwertsätze

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen, deren Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ mit $L, M \in \mathbb{R}$ existieren. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L \cdot M$$

falls $M \neq 0$, gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M}$$

Der Beweis der Grenzwertsätze bedient sich der im vorherigen Kapitel ausgeführten ε-δ Definition. Diese Methode bezeichnet sich in der Mathematik als "Beschränken". Man nutzt die Eigenschaft einer Differenz definiert als Abstand und lässt diesen infinitesimal (unendlich) kleiner werden.

2.3.1 Addition von Grenzwerten

Angenommen ein ε wurde bereitgestellt. Dies ist die erste Zeile eines jeden Epsilon-Delta-Beweises, da die Definition des Grenzwertes erfordert, dass das Argument für jedes Epsilon funktioniert. Man definiere ein neues kleineres Epsilon: $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Definition des Limes geht hervor, dass ein $\delta_1 > 0$ existiert, sodass für alle x, die die Gleichung $0 < |x - x_0| < \delta_1$ erfüllen, die Aussage $|f(x) - a| < \varepsilon_2$ impliziert wird. Ebenfalls existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass alle x, die die Gleichung $0 < |x - x_0| < \delta_2$ erfüllen, die Aussage $|g(x) - b| < \varepsilon_2$ implizieren. Wir definieren nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Man beachte hierbei, dass in jedem Fall $\delta > 0$. Daraus folgt, dass für jedes x der Ausdruck $0 < |x - x_0| < \delta$ zum einen $0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ und zum anderen $0 < |x - x_0| < \delta_1$ und $0 < |x - x_0| < \delta_2$ impliziert (Da der Betrag kleiner ist als das Minimum von zwei Werten, ist er auch kleiner als jede dieser Mengen für sich). Fassen wir die vorherigen Schlussfolgerungen zusammen, dass $|f(x) - a| < \varepsilon_2$ und $|g(x) - b| < \varepsilon_2$ ist, ergibt sich, dass $|f(x) - a| + |g(x) - b| < \varepsilon_2 + \varepsilon_2$. Die Dreiecksungleichung besagt, dass für beliebige reelle Zahlenwerte von A und B die Ungleichung $|A + B| \leq |A| + |B|$ wahr sein wird. Das heißt, dass $|f(x) - a + g(x) - b| \leq |f(x) - a| + |g(x) - b|$.

Daraus folgt, dass $|f(x) - a + g(x) - b| < \varepsilon_2 + \varepsilon_2$. Fassen wir die Ergebnisse zusammen: $|f(x) + g(x) - a - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ und $|(f(x) + g(x)) - (a + b)| < \varepsilon$ implizieren, dass:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \square$$

Eine formal symbolische Beweisführung würde in etwa so aussehen:

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a \ \wedge \ \lim_{n \to \infty} g(x_n) = b$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall n > n_\varepsilon : \ |f(x_n) - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge \ |g(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \delta_f, \delta_g \ \ \forall n > n_\varepsilon : \ |x_n - x| < \delta_f, \delta_g$$

Dreiecksungleichung: $|A + B| \leq |A| + |B| \quad A, B \in \mathbb{R}$

$$|f(x_n) - a + g(x_n) - b| \leq |f(x_n) - a| + |g(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|f(x_n) + g(x_n) - (a + b)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b \quad \square$$

Verständnishinweis: Es wird weniger durch Termumformung, als durch geschickte Abschätzung gezeigt, dass trotz der Addition einer weiteren Funktion die **Beschränkung** (die nur eine andere Bezeichnung für den Limes ist) weiterhin gilt.

2.3.2 Multiplikation von Grenzwerten

Der Beweis für die Multiplikation von Grenzwerten ist etwas komplizierter, basiert aber auf dem gleichen Prinzip vom ersten Grenzwertsatz.

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a \ \wedge \ \lim_{n \to \infty} g(x_n) = b$$

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall n > n_\varepsilon : \; |f(x_n) - a| < \frac{\varepsilon}{2S_f} \;\wedge\; |g(x_n) - b| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

$$\Rightarrow \exists \delta_f, \delta_g \;\; \forall n > n_\varepsilon : \; |x_n - x| < \delta_f, \delta_g$$

$$|f(x_n)g(x_n) - ab|$$

$$= |f(x_n)g(x_n) - f(x_n)b + f(x_n)b - ab|$$

$$= |f(x_n)(g(x_n) - b) + b(f(x_n) - a)|$$

Dreiecksungleichung: $|A + B| \leq |A| + |B| \quad A, B \in \mathbb{R}$

$$|f(x_n)(g(x_n) - b) + b(f(x_n) - a)| \leq |f(x_n)(g(x_n) - b)| + |b(f(x_n) - a)|$$

und da der Betrag multiplikativ ($|xy| = |x||y|$) ist:

$$|f(x_n)(g(x_n) - b) + b(f(x_n) - a)| \leq |f(x_n)||(g(x_n) - b)| + |b||(f(x_n) - a)|$$

Da $f(x_n)$ beschränkt ist, gilt: $\exists S_f > 0 \;\; \forall n > n_f : \; |f(x_n)| < S_f$ und damit:

$$|f(x_n)||(g(x_n) - b)| + |b||(f(x_n) - a)| = S_f \frac{\varepsilon}{2S_f} + |b| \frac{\varepsilon}{2|b|}$$

$$|f(x_n)(g(x_n) - b) + b(f(x_n) - a)| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x_n)g(x_n) - ab| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = ab \quad \square$$

2.4 Regel von de L'Hospital

Die nach Guillaume François de L'Hospital benannte "Regel von de L'Hospital" ist eine Regel zur Bestimmung von Grenzwerten besonderer Funktionen, die Quotient von zwei gegen 0 konvergierenden oder manchen divergierenden Funktionen sind.

Für die stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen f, g mit $g'(x_0) \neq 0$ gilt, wenn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ den Ausdruck $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $\frac{-\infty}{-\infty}$ annimmt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der mathematisch korrekte Beweis für diese Regel bedient sich auch der ε-δ Definition von Grenzwerten. Dieser wird hier nicht weiter erläutert. Für den Fall, dass f und g stetig differenzierbare Funktionen an der Stelle x_0 sind und weiterhin $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(0) \neq 0$ gilt, ist der folgende Beweis zulässig und ausreichend:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - f(x_0)} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \square
\end{aligned}$$

Ein Anwendungsbeispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\sin(x)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Kapitel 3

Analysis - Differentialrechnung

Die Differentialrechnung ist ein Teilgebiet der Analysis und beschäftigt sich mit dem Anstieg von Funktionen.

Die Ableitung einer Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 ist geometrisch gesehen die Steigung der an der Stelle x_0 anliegenden Tangente und beschreibt lokal das Steigungsverhalten der Funktion bei x_0. Eine Annäherung an die Steigung in einem Punkt P ergibt sich aus dem Differenzenquotienten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Dabei wird die Steigung einer Sekante im Intervall $I : [x_0, x_1]$ berechnet. Die Steigung an der Stelle x_0 wird über diese Methode nur näherungsweise bestimmt. Für ein präziseres Ergebnis lässt man die Differenz zwischen x_0 und x_1 gegen Null laufen. Das betrachtete Intervall wird dadurch theoretisch unendlich klein. Man bezeichnet den Operator dieses Vorgehens als Differentialquotienten. Die Abb. 3.1 veranschaulicht den

konzeptionellen Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_0} := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

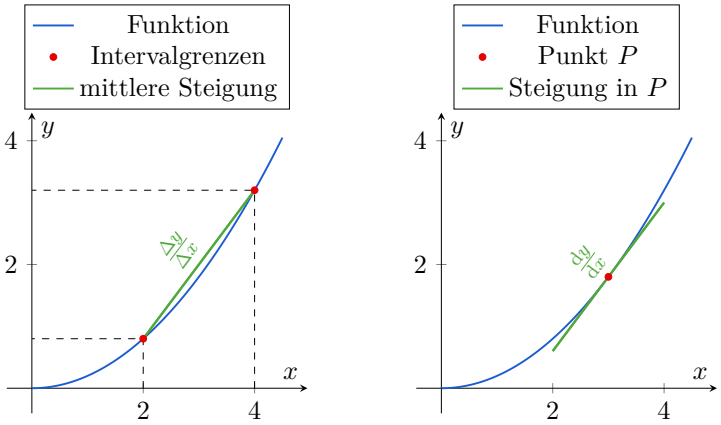


Abb. 3.1: Visualisierung des Differenzen- (links) und Differenzialquotienten (rechts)

Ist es möglich, für jedes Element der Definitionsmenge von f eine derartige Linearisierung vorzunehmen, weist man f eine Ableitungfunktion $f' \colon X \to \mathbb{R}$ zu, die jedem Element des Definitionsbereichs X von f die Steigung der dortigen Linearisierung zuordnet. f ist dann "in X differenzierbar". f wird stetig differenzierbar bezeichnet, wenn f differenzierbar ist und f' stetig ist.

Die Ableitungsfunktion von f ist über den Differentialquotienten wie folgt definiert:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Der besseren Übersicht wegen wird anstelle des Δx oft ein h geschrieben. Historisch bedingt gibt es verschiedene Notationen für eine Ableitungsfunktion. Die am weitesten verbreitete Darstellung ist die Lagrange-Notation, die auf den Mathematiker Joseph-Louis Lagrange zurückzuführen ist. Die Ableitung von f stellte er erstmals 1917 mit f' dar, die zweite Ableitung mit f'' und allgemein die n-te Ableitung mit $f^{(n)}$. Isaac Newton, welcher neben Leibnitz als Begründer der Infinitesimalrechnung (und damit auch der Differentialrechnung) gilt, notierte die erste Ableitung von x mit $\dot{x}$ und die zweite Ableitung mit $\ddot{x}$. Diese Schreibweise ist heutzutage in der Mathematik kaum noch zu finden, wobei sie in der Physik, vor allem der Mechanik, als Ableitung für die Zeit noch verwendet wird. Gottfried Wilhelm Leibnitz notierte die erste Ableitung mit $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, die zweite mit $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ und die n-te Ableitung $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$. Bei dieser Schreibweise handelt es nicht um einen Bruch, sondern um die Differentiale $\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$, welche in der modernen Differentialrechnung nur noch von symbolischer Bedeutung sind und nur in der Schreibweise als formaler Differentialquotient erlaubt sind. Äquivalenzumformungen durch Multiplikation oder Division der Differentiale werden zum Beispiel bei der Seperationsmethode zwar durchgeführt, sind mathematisch gesehen aber umstritten.

3.1 Differenzierbarkeit

Die Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft einer Funktion, sich lokal um einen Punkt in eindeutiger Weise linear approximieren zu lassen. f ist differenzierbar, wenn der beidseitige Grenzwert des Differentialquotienten existiert. Jede differenzierbare Funktion ist stetig. Eine Funktion, die an den Stellen $x = -1$

und $x = 2$ nicht differenzierbar ist, findet sich in Abb. 3.2.

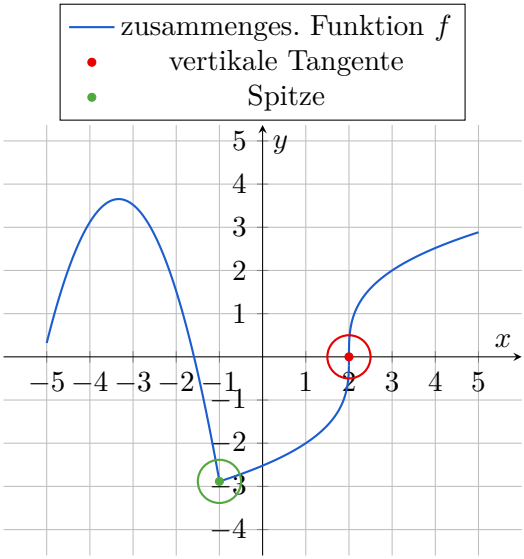


Abb. 3.2: Nicht-differenzierbare Funktion

3.2 Beweise ausgewählter Ableitungen

Hier werden Beweise für Ableitungen ausgewählter Funktionen aufgelistet. Dabei gilt stets die Vorraussetzung, dass die zu differenzierende Funktion im Ableitungsintervall definiert und stetig ist. Die Definition der Ableitung über der Differentialquotienten sei vorausgesetzt.

3.2.1 Ableitung einer Konstante

Als Konstante wird eine Zahl bezeichnet, die sich unabhängig von der Funktionsvariable verhält. Ihr Wert ist unveränderlich.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto c$.

Behauptung: $f'(x) = 0$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &:= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \quad \square\end{aligned}$$

Möchte man eine Funktion differenzieren, die von mehreren Variablen abhängt, und nimmt all jene Variablen, die nicht der sogenannten Ableitungsvariable entsprechen, als konstant an, spricht man von partieller Differenzierung. Partielle Ableitungen kommen häufig in der mehrdimensionalen Analysis und der Vektorraumanalysis vor. In der Notation verwendet man hier nicht mehr das Symbol des klassischen Differentials, sondern das Symbol ∂ (gesprochen "del").

Eine Beispielfunktion $f(x,t) = \sin(x) + t$ ausschließlich abgeleitet nach x wird

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$$

notiert. Partielle Ableitungen finden auch in der Physik häufig Anwendung. Ein komplexes Beispiel könnte wie folgt aussehen (Gesetz zur Induktionsspannung):

$$\oint\limits_{\partial\mathcal{A}(t)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int\limits_{\mathcal{A}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

3.2.2 Ableitung der Identität

Als Identitätsfunktion der reellen Zahlen wird die Funktion $f(x) = x$ bezeichnet. Sie ist die Funktion, die immer den gleichen Wert zurückgibt, der als Argument verwendet wurde.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

Behauptung: $f'(x) = 1$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= 1 \quad \square\end{aligned}$$

3.2.3 Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\},\ x \mapsto e^x$.

Behauptung: $f'(x) = e^x$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\end{aligned}$$

Sei $n = e^h - 1$, dann ist $h = \ln(n+1)$ und $n \to 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= e^x \lim_{n\to 0} \frac{n}{\ln(n+1)} \\
&= e^x \lim_{n\to 0} \frac{1}{\frac{1}{n}\ln(n+1)} \\
&= e^x \lim_{n\to 0} \frac{1}{\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}} \\
&= e^x \frac{1}{\ln(e)} \\
&= e^x \quad \square
\end{aligned}$$

3.2.4 Ableitung des natürlichen Logarithmus

Der natürliche Logarithmus ln ist der Logarithmus zur Basis der Eulerschen Zahl.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^+\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$.

Behauptung: $f'(x) = \frac{1}{x}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} :&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \left(\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)
\end{aligned}$$

Sei $\frac{1}{n} = \frac{h}{x}$: wenn $h \to 0$, geht $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)\end{aligned}$$

Da f stetig ist, gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^+ \lim_{x\to x_0} (\ln x) = \ln(x_0) = \ln\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{x} \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{x} \ln(e) \\ &= \frac{1}{x} \quad \square\end{aligned}$$

3.2.5 Ableitung der Sinusfunktion

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ x \mapsto \sin(x)$.

Behauptung: $f'(x) = \cos(x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}\end{aligned}$$

Additiontheorem der Sinisfunktion (siehe Kapitel 11.3): $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1) + \cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(\cos(h)-1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(h)-1}{h}$ ist die Ableitung des Kosinus an der Stelle 0, da

$$\frac{\mathrm{d}\cos(x)}{\mathrm{d}(0)} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$$

Die Kosinusfunktion hat an der Stelle $x = 0$ ein Maximum, also eine Steigung von 0:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\cdot 1 \quad \text{(Beweis siehe Kap. 10.3.1)} \\
&= \cos(x) \quad \square
\end{aligned}$$

3.2.6 Ableitung der Kosinusfunktion

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)$.

Behauptung: $f'(x) = -\sin(x)$

Beweis:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

Additiontheorem der Kosinisfunktion (siehe Kapitel 11.3): $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(h)-1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\cdot 0 - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x)\cdot 1 \quad \text{(Beweis siehe Kap. 10.3.1)} \\
&= -\sin(x) \quad \square
\end{aligned}$$

3.2.7 Ableitung der Tangensfunktion

Der Tangens eines Winkels ist der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete. Die Quotientenregel (siehe Kap. 3.3.7) wird für diesen Beweis vorausgesetzt.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x)$.

Behauptung: $f'(x) = \sec(x)^2$

Beweis:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - (\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \\ &= \sec(x)^2 \quad \square\end{aligned}$$

3.3 Beweise der Ableitungsregeln

Zusammengesetzte und mehrfach verkette Funktionen leitet man mithilfe von Ableitungsregeln ab. Grundsätzlich ist es möglich, für jede stetige Funktion eine Ableitungsfunktion analytisch zu finden. Das ist beim Bilden von Stammfunktionen nicht immer der Fall. Die meisten Funktionen sind nicht integrierbar. Auch diese Beweise beruhen auf der Annahme, dass die zu differenzierenden Funktionen differenzierbar sind.

3.3.1 Summenregel

Gesucht ist die Ableitung einer Funktion, die sich aus mehreren Funktionen additiv zusammensetzt.

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to X$ und $g : \mathbb{R} \to Y$.

Behauptung: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)+g(x)) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \square
\end{aligned}$$

3.3.2 Faktorregel

Nach der Faktorregel lassen sich Faktoren (oder Koeffizienten), welche nicht anderweitig mit der Ableitungsvariable in Verkettung stehen, unabhängig von der Ableitung betrachten.

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ und die Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Behauptung: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c \cdot f(x)) = c \cdot \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(c\cdot f)}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h) - c\cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= c\cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \square
\end{aligned}$$

3.3.3 Reziproke Regel

Gesucht ist die allgemeine Ableitungsfunktion des Kehrwerts einer Funktion.

Gegeben sei die Funktion f, die definiert als Kehrwert der Funktion $u : \mathbb{R} \to X$ ist: $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

Behauptung: $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{u(x+h)} - \frac{1}{u(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x)-u(x+h)}{u(x+h)u(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x) - u(x+h)}{h \cdot u(x+h)u(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x) - u(x+h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{u(x) \cdot u(x+h)} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{u(x) + u(x+h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{u(x) \cdot u(h)} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x) \cdot \frac{1}{u(x)^2} \\
&= -\frac{u'(x)}{u(x)^2} \quad \square
\end{aligned}
$$

3.3.4 Potenzregel

Beweis für natürliche Exponenten

Eine Möglichkeit, dies zu beweisen, ist die Verwendung des binomischen Lehrsatzes. Da dieser nur für positive ganze Zahlen

gilt, gibt es die folgende Einschränkung: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als $f \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Per Definition ist die Ableitung von f nach x:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Nach dem binomischen Lehrsatz, der besagt, dass $\forall a, b \in \mathbb{R}$ und $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

gilt, vereinfacht sich die Ableitung zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-1} + \binom{n}{n} h^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + \binom{n}{n-1} x h^{n-2} + \binom{n}{n} h^{n-1} \right] \\
&= \binom{n}{1} x^{n-1} \\
&= n x^{n-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis für ganze Exponenten

Dass dies auch für alle ganzen Zahlen gilt, zeigt der Beweis über die reziproke Regel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert als $f :\mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m = -n$. Daher kann $m \geq 0$ und der Beweis für natürliche Exponenten angewendet werden, da $f(x) = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$. Ersetze nun $u(x) = x^m$. Nach der reziproken Regel für die

Differenzierung ist die Ableitung von f nach x:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= -\frac{u'(x)}{u(x)^2} \\
&= -\frac{mx^{m-1}}{\left(x^m\right)^2} \\
&= -\frac{mx^{m-1}}{x^m \cdot x^m} \\
&= -\frac{mx^{m-1}}{x^{m+1} \cdot x^{m-1}} \\
&= -mx^{m-1-m-1-m+1} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis für rationale Exponenten

Dieser Beweis bedient sich der impliziten Differenzierung und baut auf den vorherigen Beweisen auf. Sei $f : X \to \mathbb{R},\ X \subseteq \mathbb{R}$ definiert als $f :\mapsto x^n$ wobei $n \in \mathbb{Q}$. Weil n eine rationale Zahl ist, kann es definitionsgemäß als Bruch zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ ausgedrückt werden. Sei $n = \frac{a}{b}$. Daraus folgt, dass $f(x)^b = \left(x^n\right)^b = x^{\frac{a}{b}b} = x^a$. Die Differenzierung auf beiden Seiten der Gleichung nach x ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)^b\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^a\right) \\
b \cdot f(x)^{b-1} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= ax^{a-1} \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{ax^{a-1}}{b \cdot f(x)^{b-1}}
\end{aligned}$$

Durch Substituieren von $f(x) = x^{\frac{a}{b}}$ und $\frac{a}{b} = n$ erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{a}{b}\frac{x^{a-1}}{x^{a-\frac{a}{b}}}$$

$$= nx^{a-1-a+n}$$
$$= nx^{n-1} \quad \square$$

Beweis für reelle Exponenten

Bei diesem Beweis für alle reellen Exponenten werden Exponential- und Logarithmusfunktionen und deren Ableitungen sowie die Kettenregel verwendet. Sei $f : X \to \mathbb{R},\ X \subseteq \mathbb{R}$ definiert als $f :\mapsto x^n$ wobei $n \in \mathbb{R}$. Weil $x^n = e^{n \ln x}$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{n \ln(x)}\right)$$
$$= e^{n \ln(x)} \cdot \frac{n}{x}$$

Durch Rücksubstituieren von $e^{n \ln x} = x^n$ erhält man

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = x^n \cdot \frac{n}{x}$$
$$= nx^n \cdot x^{-1}$$
$$= nx^{n-1} \quad \square$$

Einschränkung für $n = x = 0$

Im Falle von $n = x = 0$ ist die Ableitung von f nach x wegen einer Doppelteilung durch Null unbestimmt:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(0)} = nx^{n-1} = 0 \cdot 0^{-1} = \frac{0}{0}$$

In anderen Fällen der Division durch Null, z. B. bei der Funktion $f(x) = x^{-2}$, ist Null nie ein Element des Definitionsbereichs.

3.3.5 Kettenregel

Gegeben sei die Funktionen f, die definiert ist als die Verkettung der Funktionen $u : \mathbb{R} \to X$ und $v : \mathbb{R} \to Y$: $f(x) = u(v(x))$

Behauptung: $(u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x+h)) - u(v(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x) + v(x+h) - v(x)) - u(v(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x) + v(x+h) - v(x)) - u(v(x))}{v(x+h) - v(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(v(x) + dv) - u(v(x))}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
&= u'(v(x)) \cdot v'(x) \quad \square
\end{aligned}$$

3.3.6 Produktregel

Gegeben sei die Funktion f, die aus den Funktionen $u : \mathbb{R} \to X$ und $v : \mathbb{R} \to Y$ multiplikativ zusammengesetzt ist: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Behauptung: $(u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x+h)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} v(x) \lim_{\mathrm{d}x\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}
\end{aligned}$$

$$= u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \quad \square$$

3.3.7 Quotientenregel

Gegeben sei die Funktion f, die als Quotient der Funktionen $u : \mathbb{R} \to X$ und $v : \mathbb{R} \to Y$ definiert ist: $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Behauptung: $(u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}\right) \\
&= u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{v(x)} \\
&= u'(x) \cdot \frac{1}{v(x)} + u(x) \cdot \left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) \\
&= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2} \quad \square
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Analysis - Integralrechnung

Die Integralrechnung beschäftigt sich als zweites großes Gebiet der Analysis mit der Berechnung von Flächen oder Volumina unter Kurven beziehungsweise Flächen. Das Integrieren ist die Umkehrung vom Ableiten mit dem Unterschied, dass im Gegensatz zum Differenzieren, kein für alle Fälle abgedeckter - universeller - Algorithmus zum Bestimmen von Integralen existiert oder gar viele Funktionen nachweislich gar nicht integrierbar sind. Das Bestimmen von Stammfunktionen verlangt trainiertes "Raten" und das Benutzen von bereits bekannten Stammfunktionen und Identitäten ab. Die Integration durch eine vielzahl verschiedener Substitutionsverfahren und die partielle Integration sind nur ein paar der Methoden die dafür nützlich sein können. Obwohl Computer Algebra Systeme völlig andere Algorithmen zum Bestimmen von Stammfunktionen als Menschen benutzen, sind sie längst nicht in der Lage für jede Funktion Stammfunktionen zu finden. Bei Taschenrechnern erfolgt daher einer Integration oft nur näherungsweise mithilfe numerischer Quadratur.

4.1 Geschichte

An der Problemstellung der Integralrechnung wurde in leicht abgewandelter Form bereits im antiken Griechenland gemeißelt. Die Griechen Antiphon und Eudoxos von Knidos entwickelten im 5. Jahrhundert vor Christus die sogenannte *Exhaustionsmethode*, ein wichtiges Fundament für unsere heutige Methodik. So ließen sich krummlinige Flächen durch das Ausschöpfen mithilfe von einfach berechenbaren Figuren wie Dreiecken und Quadraten approximieren. Archimedes nutzte diese Grundlage im Jahr 240 vor Christus zur Entwicklung des ersten beliebig präzisen Annäherungsverfahrens an die Kreiszahl π durch Einschreiben eines regelmäßigen n-Ecks in den Einheitskreis. Im Zuge dessen gelang es ihm mit einem 96-Eck zu beweisen, dass gilt:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Als Begründer der Integralrechnung gelten Sir Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibnitz, welche unabhängig voneinander den Fundamentalsatz der Analysis↗ entdeckten. Durch deren Einführung der infinitesimalen Größen gelten sie als Väter der Analysis. Aber auch Bernhard Riemann, de L'Hospital und Johann I Bernoulli, auf den das Wort Integral zurück geht sind bekannt für ihre Entdeckungen und Publikationen über die Integralrechnung.
Das Integralzeichen $\int$ stellt ein langezogenes S dar und steht für das Wort Summe. Diese Art das Integral zu symbolisieren, geht auf Leibnitz zurück. Formal notiert ist das Integral einer reellen Funktion f im Intervall $[a, b]$ über die Funktionsvariable x:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Die Schreibweise deutet die Summierung der unendlich schmalen 'Flächestreifen' der Höhe $f(x)$ und infinitesimalen Breite dx an, die sich zwischen dem Graphen und der Abszisse erstrecken.
Als Infinitesimalzahl wird eine Zahl bezeichnet, welche zwar kleiner als die kleinste positive reelle Zahl, aber dennoch größer als Null ist. Dass eine solche Infinitesimalzahl im Körper der reellen Zahlen gar nicht existieren kann ist klar, da eine solche Zahl auch die Bedingung $0 < x < \frac{x}{2}$ erfüllen müsste. Dies ist darin begründet, dass auch $\frac{x}{2}$ wieder eine reelle Zahl ist, x jedoch kleiner als jede andere reelle Zahl sein muss. Entweder muss die oben genannte Forderung abgeschwächt werden oder die reellen Zahlen müssen in einen größeren geordneten Körper eingebettet werden, der Platz für solche zusätzlichen Elemente bietet. Letzteres ist der Weg, für den sich die Mathematik entschied.

4.2 Fundamentalsatz der Analysis

Der Fundamentalsatz der Analysis findet seinen Ursprung unter anderem im wunderschönen Leipzig. *Gottfried Wilhelm Leibnitz*, einer der bedeutendsten Mathematiker in der kontinuierlichen Mathematik, formulierte (unabhängig von Isaac Newton) um das Ende des 17. Jh. seine Erkenntnisse über die Differential- und Integralrechnung. Damit legte (auch) er den Grundstein für die heutige moderne Berechnung von Flächen im 2 bis mehrdimensionalen Raum.

Der Fundamentalsatz besagt:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von f ist.
Es sei f eine Funktion, für die gilt: $f : x \longmapsto f(x),\ \ x \in X$
Es sei F eine Funktion in Bezug auf f, die jedem x den Flächeninhalt unter der Funktion f von einem Fixpunkt $\varepsilon \in X; \varepsilon < x$ bis $x \in Y$ zuordnet: $F : x \longmapsto F(x),\ :\ x \in Y$ und $Y \subset X, X \subseteq \mathbb{R}$

Es gilt $\forall x_0, x_1 \in Y; x_0 < x_1$:

$$F(x_0) < F(x_1)$$

weil: $x_0 > x_1$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$\Leftrightarrow F(x_0) < F(x_0 + \Delta x)$$

betrachtet wird die Fläche zwischen $F(x_0)$ und $F(x_0 + \Delta x)$, so ist unter der Bedingung $\forall x \in [x_0; x_0 + \Delta x] : \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} > 0$

$$f(x_0)\Delta x \ \leq\ F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \ \leq\ f(x_0 + \Delta x)\Delta x$$

$$\Rightarrow f(x_0) \ \leq\ \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \ \leq\ f(x_0 + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) \ \leq\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \ \leq\ \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \ \leq\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \ \leq\ f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \quad \square$$

weitere Notationen des Satzes sind:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \quad \text{oder}$$

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) \quad \text{oder}$$

$$F'(x) = f(x)$$

4.3 Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral einer Funktion f ist definiert als die Größe jener Fläche A, die begrenzt wird durch ein Stück der Abszissenachse, von $x = a$ bis $x = b$, den beiden Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ an diesen Stellen, sowie von der Kurve einer Funktion $y = f(x)$, die im Intervall I $[a, b]$, $\subset \mathbb{R}$ begrenzt ist. Wichtig zu betonen ist, dass das Ergebnis eines bestimmten Integrals eine konkrete positive oder negative Zahl ist, da hier lediglich Auskunft über eine Fläche gegeben wird. Um das nachfolgende besser zu verstehen, stellen wir uns die Fläche unter $f(x)$ von a bis b (A_a^b) erst einmal als die Summe vieler schmaler Streifen, die unterhalb des Funktionsgraphen liegen, vor.

Zur tatsächlichen Annäherung an A_a^b wird das Intervall I von a bis b in n gleiche Teilintervalle Δx_i, $i = 1, 2, ..., n$ unterteilt, sodass $n \cdot \Delta x = b - a$ gilt. Die jeweilig benachbarten Teilpunkte begrenzen somit die Teilintervalle jeweils in einen Streifen der breite Δx. Nun kann man im i-ten Teilintervall als Höhe einmal jeweils den kleinsten ($f(x_i^{\min})$) und den größten ($f(x_i^{\max})$ von f angenommenen Funktionswert wählen und die Fläche unter dem Funktionsgraph, die an sich kaum zu berechnen wäre mit je einem kleineren Rechteck mit Flächeninhalt $\Delta x \cdot f(x_i^{\min})$ und einem größeren Rechteck mit Fläche $\Delta x \cdot f(x_i^{\max})$ ersetzen. Summiert man alle Flächen der kleineren Rechtecke auf, so erhält man eine Approximation des realen Flächeninhalts, die jedoch kleiner ist als die tatsächlich gesuchte Fläche. Diese Approximation nennt sich *Untersumme*. Ähnliches ist ebenfalls beim Aufsummieren der größeren Rechtecke zu beobachten - hier ist die Approximation größer als A_a^b und wird *Obersumme* genannt. Wird nun die Zahl der Teilintervalle von I immer weiter erhöht, und so Δx immer kleiner, nimmt die Obersumme immer mehr ab und nähert

sich in ihrem Wert asymptotisch an A_a^b an. Die Untersumme dagegen wird mit kleineren Intervallen immer größer und nähert sich der Obersumme ähnlich ebenfalls A_a^b an. Die Ober- und Untersummen bilden jeweils eine monoton fallende beziehungsweise monoton steigende beschränkte Folge. Wenn diese beiden Folgen für $n \to \infty$ denselben Grenzwert (A_a^b) haben dann und nur dann existiert das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} A_a^b &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\min}) \cdot \Delta x_i}_{\text{Untersumme}} \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{\max}) \cdot \Delta x_i}_{\text{Obersumme}} \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich aus der Definition folgender Zusammenhang für Δx_i:

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

Eine weitere, meist einfachere Art der Berechnung bestimmter Integrale sind die sogenannte Links- beziehungsweise Rechtssumme. Da es bei Funktionen, die ihre Monotonie nicht beibehalten oft sehr aufwendig ist immer das Maximum oder das Minimum eines jeden Teilintervalls zu finden wird bei der Linkssumme, dem Namen entsprechend einfach der am weitesten Links gelegene Funktionswert $(f(x_{i-1}))$ des Teilintervalls und bei der Rechtssumme der am weitesten rechts gelegene Funktionswert $(f(x_i))$des Teilintervalls hals höhe des Rechtecks genommen, auch hier konvergieren die beiden Summen

zum gleichen Grenzwert A_a^b, wie auch Ober- und Untersumme:

$$\begin{aligned} A_a^b &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \cdot \Delta x_i}_{\text{Linkssumme}} \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x_i}_{\text{Rechtssumme}} \\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Weiterhin ergeben sich aus der Definition folgende Zusammenhänge für x_{i-1} und x_i:

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

$$x_{i-1} = a + (i-1) \cdot \Delta x$$

Ist der Integrand f stetig, so ist stets ein entsprechendes Integral vorhanden. Jede stetige Funktion ist integrierbar. Dasselbe gilt, wenn der Integrand im im Intervall $[a, b]$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen hat, aber beschränkt ist, also keine Polstellen aufweist. Dabei kann f sowohl über als auch unter der x-Achse verlaufen. Für Teile der Kurve die unter $y = 0$ verlaufen wird die aufsummierte Fläche einfach negativ gewertet, das bestimmte Integral ist in dieser hinsicht eine Art Flächenbilanz. Im folgenden Absatz werden nun einige trivial ableitbare Eigenschaften des bestimmten Integrals genauer beleuchtet.

4.3.1 Eigenschaften des bestimmten Integrals

Vertauschen der Grenzen:

Beim Vertauschen der Integrationsgrenzen a und b eines Integrals, ändert man per definitionem die Integrationsrichtung und somit das Vorzeichen der Faktoren Δx_i. Daraus folgt ein Vorzeichenwechsel des gesamten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ -\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

Zerlegung des Integrals in eine Summe:

Auch lässt sich die Summe $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ an einem beliebigen Punkt c im Intervall $[a, b]$ in zwei kleinere Summen, eine von a bis c, die andere von c bis b, unterteilen. Dies ist möglich, da der Grenzwert einer Summe gleich der Summe der Grenzwerte der Summanden ist (siehe Beweis 2.1.1). Dies ist besonders bei Integranden nützlich, die im Intervall Sprungstellen endlicher Sprunghöhe besitzen, hier wird das Integral an den Sprungstellen aufgeteilt. Eine weitere Verwendungsmöglichkeit bietet sich, bei der Aufteilung des gesamten Integrals in seine positiven und negativen Flächenteile, hier fungieren die Nullstellen des Integranden als Punkte, an denen das Integral geteilt wird.

$$\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x \ = \ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Auf die gleiche Weise gilt diese Aufteilung in eine Summe mehrerer Integrale auch bei einem Integral einer Summe mehrerer integrierbarer Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$\int_a^b \Big[f(x) + g(x)\Big]\ \mathrm{d}x = \ \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

Integrand mit konstantem Faktor:

Tritt bei einer Integration der Fall ein, dass der Integrand das Produkt aus einer integrierbaren Funktion $f(x)$ und einem konstanten Faktor $c \in \mathbb{R}$ ist, so kann dieser aus der Summe $\sum_{i=1}^{n} c \cdot f(x_i)\Delta x_i$ ausgeklammert werden und steht folglich dann auch vor dem Integral:

$$\int_a^b \left[c \cdot f(x)\right] \, \mathrm{d}x \;=\; c \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

4.3.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Jede Funktion $y = f(x)$ nimmt im Intervall $[a, b]$ ein Maximum $y = M$ und ein Minimum $y = m$ an. Über die Definition des bestimmten Integrals lässt sich so folgende Ungleichung aufstellen:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dementsprechend muss es ein μ im Intervall $m \leq \mu \leq M$ geben, für das gilt:

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

Aufgrund der Stetigkeit von f lässt sich auch ein ε im Intervall $a \leq \varepsilon \leq b$ finden für das $f(\varepsilon) = \mu$ gilt und so:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = (b-a)f(\varepsilon)$$

Dies lässt sich auch alternativ für ϑ im Intervall $0 \leq \vartheta \leq 1$ wie folgt umformen:

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = (b-a)f(a + \vartheta(b-a))$$

4.4 Unbestimmtes Integral

Anders als das bestimmte Integral einer Funktion, das einen Skalar, welcher die Größe der Fläche im Intervall $[a, b]$ unter jener Funktion als Ergebnis hat, handelt es sich beim unbestimmten Integral einer Funktion $f : x \longmapsto y$ um die Menge möglicher Stammfunktionen F, also jene Funktionen, für die $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$ gilt. Falls das unbestimmte Integral von f existiert, ist die Menge der möglichen Stammfunktionen unendlich groß. Jede dieser Stammfunktionen unterscheidet sich nur um eine additive Konstante - meist als C denominiert - die beim Ableiten von F entfällt.

4.4.1 Zusammenhang mit dem bestimmten Integral

Wird eine der Grenzen - in diesem Fall die obere Grenze b - eines bestimmten Integrals als die Variable x gesetzt, so wird jedem x-Wert dieser Grenze ein Wert ϕ des Integrals von der unteren Grenze a bis x zugeordnet. So ist das Integral eine Funktion $\phi(x)$ der oberen Grenze x:

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Nun soll zuerst bewiesen werden, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ \phi(x) = f(x)$ und somit ϕ eine Stammfunktion von f ist:

$$\begin{aligned}
\phi(x + \Delta x) - \phi(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t \\
\frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Nun nutzen wir den 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung (4.3.2) um unser Integral umzuformen:

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t &= ((x+\Delta x)-x)f(x+\vartheta(x+\Delta x-x)\\ &= \Delta x\ f(x+\vartheta\Delta x)\end{aligned}$$

Nun Substituieren wir das umgeformte Integral in unseren Differenzenquotienten und lassen $\Delta x \to 0$ gehen:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Delta x}\left(\Delta x\ f(x+\vartheta\Delta x)\right)\\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\vartheta\Delta x)\\ &= f(x)\quad \square\end{aligned}$$

Nun wird noch eine additive Konstante C mit $C \in \mathbb{R}$ ergänzt damit $\phi(x)$ auch wie ein unbestimmtes Integral eine Kurvenschar mit allen möglichen Stammfunktionen von $f(x)$ darstellt.

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + C = \phi(x) + C$$

Schließlich soll noch ein Zusammenhang zwischen dem Finden einer Stammfunktion und der Lösung eines bestimmten Integrals hergestellt werden. Dafür evaluieren wir das bestimmte Integral für $x = b$ und $x = a$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t &= \phi(b) + C\\ 0 = \int_a^a f(t)\mathrm{d}t &= \phi(a) + C\\ C &= -\phi(a)\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{dt} = \phi(b) - \phi(a)$$

Oft wird statt $\phi(x)$ jedoch für die Stammfunktion von f an der Stelle x, $F(x)$ geschrieben. In dieser Schreibweise sieht die Formel wie folgt aus:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

4.5 Rechenregeln zur Bestimmung von Stammfunktionen

Anders als bei der Ableitung einer Funktion ist das Ermitteln ihrer Stammfunktion oft anspruchsvoller und teilweise sogar nicht elementar lösbar, was bedeutet, dass sie mit anderen Integrationsverfahren, wie die numerische Integration oder über die Reihenentwicklung des Integranden gelöst werden müssen. Trotzdem gibt es einige allgemeine Vorgehensweisen die, zusammen mit den bereits vorgestellten Eigenschaften von Integralen, in vielen Fällen bei der Bestimmung von Stammfunktionen nützlich sind. Einen Teil dieser Verfahren werden wir in den folgenden Abschnitten Herleiten und erklären.

4.5.1 Potenzregel

Die Potenzregel der Integralrechnung ist sozusagen als Umkehrung jener aus der Differenzialrechnung (3.3.4) zu deuten. Hierbei wird zu der Funktionsschar $f_k(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ für jeden Wert von k über die folgende Formel eine Stammfunktion $F(x)$ ermittelbar:

$$\int x^k\ \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$$

Im Folgenden wird versucht diese Rechenregel zu beweisen: Zuerst betrachten wir dafür die Funktion $y = x^{k+1}$ und ihre Ableitung, die wir über das Potenzgesetz bilden:

$$\begin{aligned}(k+1)x^k &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\ \int (k+1)x^k \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\ \int (k+1)x^k \,\mathrm{d}x &= y + C\end{aligned}$$

Da $(k+1)$ ein konstanter, nicht von der Integrationsvariable x abhängiger Faktor ist, lässt sich dieser aus dem Integral herausziehen. So ergibt sich:

$$\begin{aligned}(k+1)\int x^k \,\mathrm{d}x &= y + C = x^{k+1} + C\\ \int x^k \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{k+1}x^{k+1} + \frac{C}{k+1}\\ \int x^k \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C \quad \square\end{aligned}$$

Im Folgenden ein kleine Beispielrechnung zum Verständnis:

Wir wollen das unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = 5x^3 + 2x^2$ berechnen. Dazu verwenden wir gleich mehrere Eigenschaften des Integrals, der Kern der Rechnung ist jedoch das Potenzgesetz:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int 5x^3 + 2x^2 \,\mathrm{d}x$$

Zuerst könnten wir das Integral in zwei kleinere Integrale aufteilen, da es sich beim Integranden um eine Summe handelt:

$$\int 5x^3 + 2x^2 \,\mathrm{d}x = \int 5x^3 \,\mathrm{d}x + \int 2x^2 \,\mathrm{d}x$$

Weiterhin ist es uns möglich die konstanten Faktoren der Integranden aus dem Integral herauszuziehen:

$$\int 5x^3 \, \mathrm{d}x + \int 2x^2 \, \mathrm{d}x = 5 \int x^3 \, \mathrm{d}x + 2 \int x^2 \, \mathrm{d}x$$

Nun wenden wir auf beide Integrale das oben hergeleitete Potenzgesetz an, die Beiden zu addierenden Konstanten C_1 und C_2 lassen sich am Ende einfach zusammenfassen, da wir so immernoch alle möglichen Stammfunktionen von f angeben:

$$\begin{aligned} 5 \int x^3 \, \mathrm{d}x + 2 \int x^2 \, \mathrm{d}x &= 5 \left(\frac{x^4}{4} + C_1 \right) + 2 \left(\frac{x^3}{3} + C_2 \right) \\ &= \frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \underbrace{5C_1 + 2C_2}_{\text{zusammenfassen}} \\ &= \frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + C \end{aligned}$$

Es wird nun versucht eben jene Gleichung auch ohne das Potenzgesetz der Differenzialrechnung herzuleiten:

$$\int x^k \, \mathrm{d}x$$

Wir wollen eine Stammfunktionenschar von $f_k(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{R}$ bestimmen. Hierbei nutzen wir den Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integral (4.4.1). So erhalten wir:

$$\int f_k(x) \, \mathrm{d}x = \int x^k \, \mathrm{d}x = \int_a^x t^k \mathrm{d}t + C$$

Dieses bestimmte Integral lässt sich als RIEMMANN'sches Integral (4.3) darstellen, für die untere Grenze wird $a = 0$ bestimmt, da alle Funktionen mit positivem, ungeraden k hier ihr Vorzeichen wechseln:

$$\int x^k \, \mathrm{d}x = \int_a^x t^k \mathrm{d}t + C = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_k(t_i)\Delta t_i + C$$

Die additive Konstante C wird im Verlauf der Rechnung aus Gründen der Übersichtlichkeit erst einmal ignoriert. Aus den Zusammenhängen $\Delta t_i = \frac{x}{n}$ und $t_i = i\frac{x}{n}$ ergibt sich im Folgenden:

$$\begin{aligned}\int x^k \, \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{x}{n}\right)^k \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k\end{aligned}$$

Nun müssen wir die Summe der ersten n k-ten Potenzen $(1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k + n^k)$ in eine für uns nützliche Form bringen. Dabei hilft die FAULHABER'sche Formel, die folgendermaßen aussieht:

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$$

Dabei ist B_j hier die j-te Bernoulli Zahl erster Art. In unsere Formel eingesetzt ergibt sich so:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)n^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \\ &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left((-1)^0 \binom{k+1}{0} B_0 n^{k+1-0} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x^{k+1}}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(n^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \right) \\
&= \frac{x^{k+1}}{k+1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k+1}}{n^{k+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \\
&= \frac{x^{k+1}}{k+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j \frac{n^{k+1-j}}{n^{k+1}} \\
&= \frac{x^{k+1}}{k+1} + \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\binom{k+1}{j} B_j}{n^j} \\
&= \frac{x^{k+1}}{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \int x^k \, \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \; k \geq 0 \quad \square
$$

4.5.2 Partielle Integration

Die partielle Integration kann verwendet werden, wenn der Integrand aus zwei oder mehr von der Integrationsvariable abhängigen Funktionen besteht, von denen mindestens eine leicht integrierbar ist. Sie ist jedoch nicht wirklich ein Gegenstück zur Produktregel der Differenzialrechnung (3.3.6), denn es wird hier keine Stammfunktion bestimmt, diese Methode allein führt uns nicht wie die Produktregel zu einer kompletten Lösung. Die partielle Integration ist eine Methode der Zurückführung eines Integrals auf ein anderes. Sie dient also nur dem Umstellen und *hoffentich* dem Vereinfachen der zu integrierenden Funktion. Die Regel lässt sich wie folgt schreiben:

$$
\int \left(u(x) \cdot v'(x) \right) \, \mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - \int \left(u'(x) \cdot v(x) \right) \, \mathrm{d}x
$$

Wie man gut an der Formel erkennt, wird hier die Ausgangsfunktion $v'(x)$ integriert, während die Funktion $u(x)$ nur ab-

geleitet werden muss. So entsteht ein neues, oft einfacheres Integral. Zur Anschauung hier ein kurzes Beispiel:

Wir wollen das unbestimmmte Integral $\int x \sin(x)\ \mathrm{d}x$ berechnen. Um diese Rechnung drastisch zu erleichtern, setzen wir $u = x$ und $v' = \sin x$. So ergibt sich $u' = 1$ und $v = -\cos x$. So erhalten wir bei Anwendung der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}\int x \sin x\ \mathrm{d}x &= -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x)\ \mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \int \cos x\ \mathrm{d}x \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

Im Folgenden wird versucht diese Rechenregel zu beweisen: Betrachten wir die Funktion $y = u(x) \cdot v(x)$ und ihre Ableitung, die wir über die Produktregel bilden. Zur Übersichtlichkeit wird hier das (x) hinter der jeweiligen Funktion weggelassen. So ergibt sich:

$$\begin{aligned}u' \cdot v + u \cdot v' &= (u \cdot v)' \\ \int (u' \cdot v + u \cdot v')\ \mathrm{d}x &= \int (u \cdot v)'\ \mathrm{d}x \\ \int (u' \cdot v)\ \mathrm{d}x + \int (u \cdot v')\ \mathrm{d}x &= uv \\ \int (u \cdot v')\ \mathrm{d}x &= uv - \int (u' \cdot v)\ \mathrm{d}x \quad \square\end{aligned}$$

4.5.3 Substitutionsverfahren

Oft spielt bei der Berechnung von Integralen die Substitution eine wichtige Rolle. Ein Integral einer Funktion $f(x)$ kann

übersichtlicher und leichter integrierbar werden, wenn man einen Teil der zu integrierenden Funktion als neue Variable u einführt oder die Integrationsvariable x mit einer neuen von u abhängigen Funktion $g(u)$ gleichsetzt ($x = g(u)$). Natürlich ist der Name der Substitutionsvariable arbiträr, wir könnten sie auch genauso gut ξ oder Alfred nennen, wobei letzteres die Rechnung nicht gerade übersichtlicher machen würde. So oder so müssen wir nach der Substitution die Beziehung zwischen dem Differential $\mathrm{d}x$ der eigentlichen Integrationsvariable x und $\mathrm{d}u$ beziehungsweise dAlfred, also dem Differential der substituierten Variable berücksichtigen.

Lineare Substitution

Sei $f(x) = (g \circ h)$ eine lineare Verkettung von Funktionen, wobei mindestens eine der beiden Funktionen in diesem Beispiel die Funktion h die Form $h(x) = mx + n$ hat. Man substituiert dann $u = h(x) = mx + n$ und erhält für die Differentiale die Beziehungen $m\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$. Diese Substitution ist zielführend, wenn in der Folge $g(u)$ nach der Integrationsvariable u integriert werden kann. Zum Verständnis nun ein paar Beispiele:

1. Ist der Integrand $(ax + b)^n$, so lässt sich die Substitution $u = ax + b$ durchführen, so erhält man $\mathrm{d}u = a\ \mathrm{d}x$ beziehungsweise $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{a}$

$$\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x = \int \frac{u^n}{a}\ \mathrm{d}u$$
$$= \frac{u^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$$

2. Im Integranden e^{-3x} wird $-3x = u$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{3}$ substituiert. So ergibt sich:

$$\int e^{-3x}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int e^u\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{3}e^u + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

Integrand von der Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$

Ist der Integrand ein Produkt aus einer Funktion $g(x)$ und ihrer Ableitung $g'(x)$, führt die Substitution $u = g(x)$ mit $\mathrm{d}u = g'(x)\ \mathrm{d}x$ auf eine über u integrierbare Funktion:

$$\int g(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = \int u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(g(x))^2 + C$$

Allgemein lässt sich, wenn ein Integrand der Form $f(g(x)) \cdot g'(x)$ auftritt, durch die obige Substitution auf einen Integranden der Form $f(u)$ vereinfachen, solange $f(u)$ in u integrierbar ist lässt sich so folglich eine Stammfunktion finden. Hier ein paar Beispiele:

1. Der Integrand $f(x) = xe^{1+x^2}$ lässt sich durch eine Substitution $u = 1 + x^2$,$\mathrm{d}u = 2x\ \mathrm{d}x$ in ein leicht lösbares Integral überführen um von $\mathrm{d}x$ zu $\mathrm{d}u$ zu kommen nützt uns eine Multiplikation mit $\frac{2}{2}$

$$\begin{aligned}\int xe^{1+x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int 2xe^{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int e^u\ \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{1+x^2} + C\end{aligned}$$

2. Für den Integrand $f(x) = -\sin(x)\cos(x)$ hilft uns die Substitution $u = \cos(x)$ mit $\mathrm{d}u = -\sin(x)\ \mathrm{d}x$:

$$\int -\sin(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x = \int u\ \mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\cos^2 x + C$$

Logarithmische Substitution

Liegt ein Integrand der Form $f(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))}{g(x)}$ vor, so lässt sich $u = g(x)$ Substituieren, für die Differentiale erhält man dabei

$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))\,\mathrm{d}x$. So ergibt sich in diesem Fall allgemein:

$$\int \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x))}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C$$

Dazu zwei Beispiele:

1. Beim Integranden $f(x) = \frac{3x^2-4}{x^3-4x+7}$ könnten wir zwar auch nur $u = x^3 - 4x$ auswählen, jedoch bietet es sich hier an $u = x^3 - 4x + 7$ zu substituieren, da so auch die 7 ein Teil der Substitutionsvariable wird und so das Integrieren noch einfacher wird. So ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4}{x^3-4x+7}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln|u| + C = \ln|x^3-4x+7| + C\end{aligned}$$

2. Für den Integranden $f(x) = \frac{x^3}{x^4-5}$ fällt schnell auf, dass wenn wir einfach wie vorher die Nennerfunktion als u substituieren das Differential $\mathrm{d}u = 4x^3 \neq x^3$ ist. Daher müssen wir zuerst mit $\frac{4}{4}$ multiplizieren, danach steht dem Lösen nichts mehr im Weg:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^4-5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4-5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln|x^4-5| + C\end{aligned}$$

Integrale der Funktionen $\tan(x)$ *und* $\cot(x)$: Beide dieser Integranden lassen sich als Quotienten darstellen, deren Zähler die Ableitung des Nenners ist, somit lässt sich durch Logarithmische Substitution für beide dieser Funktionen das unbestimmte Integral berechnen:

$$\begin{aligned}\int \tan x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u = -\ln|u| + C \\ &= -\ln|\cos x| + C \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cot x \, \mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u \\ &= \ln|u| + C \\ &= \ln|\sin x| + C \quad \square\end{aligned}$$

Integrale der Funktionen $\arctan(x)$ *und* $\operatorname{arccot}(x)$: Bei diesen Integranden kann man mithilfe der partiellen Integration ein Integral der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x$ gewinnen und es mithilfe der logarithmischen Substitution einfach lösen:

$$\begin{aligned}&\int \underbrace{1}_{v'} \underbrace{\arctan x}_{u} \, \mathrm{d}x = x \arctan x - \int \frac{x \, \mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x}_{u=1+x^2, \mathrm{d}u=2x \, \mathrm{d}x} \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(u) + C \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C \quad \square\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{1}_{v'} \underbrace{\operatorname{arccot} x}_{u} \,\mathrm{d}x &= x \operatorname{arccot} x + \int \frac{x \,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x}_{u=1+x^2, \mathrm{d}u=2x \,\mathrm{d}x} \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \,\mathrm{d}u \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(u) + C \\ &= x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C \quad \square\end{aligned}$$

Trigonometrische Substitution

Bei der trigonometrischen Substitution substituiert man einen Teil des Integranden mit einer trigonometrischen Funktion, *überraschung*! Meist wird dies zum Eliminieren von schwer integrierbaren Wurzelfunktionen genutzt. Um dies besser zu verstehen, beginnen wir hier gleich mal mit einem konkreten Beispiel:

Wir wollen die Funktion $f(x) = \sqrt{36 - 4x^2}$ integrieren. Eine Substitution wie wir sie gewohnt sind scheitert daran, dass die Ableitung der inneren Funktion nicht als Produkt außerhalb der Wurzel steht. Unser Ziel ist es, möglichst einfach die Wurzel zu eliminieren. Dies gelingt, wenn wir trigonometrische Identitäten zurate ziehen. Wenn wir $x = \frac{6}{2} g(\theta)$ substituieren, können wir die Rechnung wie folgt simplifizieren:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{36 - 4x^2} \,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{36 - 4\left(\frac{6}{2} g(\theta)\right)^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{36 - 36(g(\theta))^2} \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= 6 \int \sqrt{1 - (g(\theta))^2}\ \mathrm{d}x$$

Aus der Identität des trigonometrischen Pythagoras $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ lassen sich nun zwei Wahlmöglichkeiten für $g(\theta)$ finden:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \implies g(\theta) = \sin\theta$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \implies g(\theta) = \cos\theta$$

Wir substituieren nun $g(\theta) = \cos\theta$ beziehungsweise $x = \frac{6}{2}\cos\theta$. Für die Differentiale ergibt sich folgender Zusammenhang: $\mathrm{d}x = -\frac{6}{2}\sin\theta\ \mathrm{d}\theta$. Eingesetzt in das Integral erhalten wir:

$$6 \int -\frac{6}{2}\sin\theta \cdot \sqrt{1 - (\cos\theta)^2}\ \mathrm{d}\theta = -18 \int \sin\theta \sqrt{\sin^2\theta}\ \mathrm{d}\theta$$
$$= -18 \int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$$

Um das Integral $\int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$ zu lösen werden wir nun einmal die Methode der partiellen Integration anwenden:

$$\int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta = -\sin\theta\cos\theta + \int \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta$$

Durch Nutzen des trigonometrischen Pythagoras erhalten wir so:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta &= -\sin\theta\cos\theta + \int \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta \\
&= -\sin\theta\cos\theta + \int 1 - \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta \\
&= -\sin\theta\cos\theta + \int 1\ \mathrm{d}\theta - \int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta \\
2\int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta &= -\sin\theta\cos\theta + \theta + C \\
\int \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta &= \frac{-\sin\theta\cos\theta + \theta}{2} + C
\end{aligned}$$

Eingesetzt erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{36-4x^2}\,\mathrm{d}x &= -18\left(\frac{-\sin\theta\cos\theta+\theta}{2}+C\right)\\ &= 9(\sin\theta\cos\theta-\theta)+C\end{aligned}$$

Zuletzt substituieren wir noch θ zurück. $x=\frac{6}{2}\cos\theta \Leftrightarrow \theta = \arccos\frac{2}{6}x$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{36-4x^2}\,\mathrm{d}x = 9\Bigg(&\sin\left(\arccos\left(\frac{2}{6}x\right)\right)\\ &\cdot\cos\left(\arccos\left(\frac{2}{6}x\right)\right)\\ &-\arccos\left(\frac{2}{6}x\right)+C\end{aligned}$$

Selbstverständlich lässt sich dieses Integral auch noch weiter vereinfachen, dies wird jedoch dem Leser als Übung überlassen.

Wie man im Beispiel gut sehen konnte, ließ sich eine Wurzelfunktion der Form $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ durch die Substitution $x=\frac{a}{b}\sin\theta$ beziehungsweise $x=\frac{a}{b}\cos\theta$ auflösen und Integrieren. Diese Substitution lässt sich auch mithilfe anderer trigonometrischer Identitäten bei ähnlichen Wurzeln durchführen.

Liegt eine Wurzel der Form $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ vor, so ergibt es sich, dass durch die Identität $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ wieder eine Substitution möglich ist. Substituieren wir hier $x=\frac{a}{b}\sec\theta$ so wird der Term unter der Wurzel unter der Annahme, dass $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$ zu $\tan^2\theta$, wobei die Wurzel eliminiert wird.

Dieselbe Identität lässt sich übrigens auch bei der Wurzel $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ anwenden, da man hier stattdessen einfach $x=$

$\frac{a}{b}\tan\theta$ substituieren kann und so die beiden Summanden zu einem $\sec^2\theta$ verbindet, aus dem man leicht die Wurzel ziehen kann.

4.6 Beweise ausgewählter Stammfunktionen

Die Beweise der Stammfunktionen verlaufen alle nach demselben Prinzip: Um eine mögliche Stammfunktion von $f(x)$ zu erhalten wird mit der unteren Grenze a und der oberen Grenze x integriert und in die Riemannsumme umgeformt. Sobald eine Stammfunktion $F(x)$ bestimmt wurde, ergibt sich die Menge aller möglichen Stammfunktion durch Addition mit einer Konstante C. Analog lassen sich die unbestimmten Integrale auch wie folgt beweisen: Der Fundamentalsatz der Analysis (Kap. 4.2) zeigt, dass die Beziehung zwischen Stammfunktion und Funktion der Differentialquotient ist.

Es gilt:

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

4.6.1 Stammfunktion der Konstante

Sei $f(x) = K$ und die untere Grenze des bestimmten Integrals $a = 0$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{dt} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} K\Delta t_i$$

Über $\Delta t_i = \frac{b-a}{n} = \frac{x}{n}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n} K \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot nK \\ &= Kx \\ \int K \, \mathrm{d}x &= Kx + C \quad \square\end{aligned}$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = Kx + C, \quad K, C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = K \quad \text{(siehe 3.2.2, 3.3.2)}$$

$$\Leftrightarrow \int K \mathrm{d}x = Kx + C \quad \square$$

4.6.2 Stammfunktion der Identität

Sei $f(x) = x$ und die untere Grenze des bestimmten Integrals $a = 0$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{dt} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i$$

Über $\Delta t_i = \frac{b-a}{n} = \frac{x}{n}$ und $t_i = a + i\Delta t_i = i\frac{x}{n}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta t_i &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gaußschen Summenformel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2n} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \\ \int x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2 + C \quad \square\end{aligned}$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = x \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.3.4)}$$

$$\Leftrightarrow \int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + C \quad \square$$

4.6.3 Stammfunktion der natürlichen Exponentialfunktion

Sei $f(x) = e^x$. Wir betrachten und integrieren die Maclaurin-Reihe von f:

$$\begin{aligned}f(x) = e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ \int e^x \, \mathrm{d}x &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \, \mathrm{d}x \\ &= \int 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^n}{n!} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \mathrm{d}x + \int x \ \mathrm{d}x + \int \frac{x^2}{2} \ \mathrm{d}x + \int \frac{x^3}{3!} \ \mathrm{d}x + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n! \cdot (n+1)} + C_n \right) \\
&= x + C_0 + \frac{x^2}{2} + C_1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_2 + \frac{x^4}{3! \cdot 4} + C_3 \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n! \cdot (n+1)} + C \\
&= C + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + C
\end{aligned}
$$

Hier „ziehen“ wir aus der Konstante C die Zahl 1 heraus, das ändert die Konstante nicht, da diese ja jede reele Zahl annehmen kann. so erhalten wir bis auf die Konstante wieder exakt dieselbe Summendarstellung von e^x. Substituieren wir $n + 1 = k$

$$\int e^x \ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k)!} + C = e^x + C$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = e^x \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.2.3)}$$

$$\Leftrightarrow \int e^x \mathrm{d}x = e^x + C \quad \square$$

4.6.4 Stammfunktion des Reziproken der Identität

Über das Potenzgesetz der Integralrechnung (4.5.1) ist es für fast jeden Exponenten von x einfach möglich das unbestimmte Integral zu evaluieren. Bei dem Versuch die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zu integrieren kommt dieses Verfahren jedoch (wortwörtlich) an seine Grenzen. Beim Versuch dies trotzdem zu tun erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int x^{-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nicht definiert. Um trotzdem eine Stammfunktion zu finden, bedienen wir uns des Grenzwertes. Somit betrachten wir die Funktionsschar $f_n(x) = x^n$ und lassen den Exponenten n gegen -1 gehen:

$$\begin{aligned}\int x^{-1}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to -1} \int_a^x t^n \mathrm{d}t + C = \lim_{n\to -1} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \right) + C \\ &= \lim_{n\to -1} \left(\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \right) + C\end{aligned}$$

Für die untere Grenze a lässt sich in unserem Fall nicht 0 wählen, da die Funktion an dieser Stelle den "Wert " $\frac{1}{0}$ hat und somit nicht definiert ist. Um die Formel möglichst weit zu vereinfachen wählen wir $a = 1$, da so der Exponent $n + 1$ wegfällt.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to -1} \left(\frac{x^{n+1} - 1}{n+1} \right) + C$$

Diesen Ausdruck kann man durch die Umformung von $\lim_{n\to-1}(n+1)$ in $\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{k})$ in eine bekannte Form bringen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to-1}\left(\frac{x^{n+1}-1}{n+1}\right)+C = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{x^{\frac{1}{k}}-1}{\frac{1}{k}}\right)+C \\ &= \lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{x}-1)k+C\end{aligned}$$

Dass dieser Ausdruck der natürliche Logarithmus mit einer additiven Konstante C ist, soll nun bewiesen werden: Wir beginnen mit einer Definition der natürlichen Exponentialfunktion $y = e^x$:

$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Bekannt ist, dass der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ der Logarithmus zur Basis e und somit die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist. Eine Umkehrfunktion können wir durch Vertauschen der Variablen x und y herleiten:

$$\begin{aligned}x &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{y}{n}\right)^n \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} &= \lim_{n\to\infty}1+\frac{y}{n} \\ \lim_{n\to\infty}\sqrt{x}-1 &= \lim_{n\to\infty}\frac{y}{n} \\ \therefore y = \ln(x) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{x}-1)n \quad \square\end{aligned}$$

Es folgt somit:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{x}-1)k+C = \ln(x)+C$$

Oft wird darüber hinaus festgelegt, dass der Logarithmus der in dieser Stammfunktion steht sowohl für positive, als auch für negative Werte von x definiert werden muss, da in dieser Form $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)+C) \neq \frac{1}{x}$ für $x < 0$ gilt und somit hier nur eine

Hälfte der Stammfunktion definiert ist. Dies wird berichtigt, indem stattdessen der natürliche Logarithmus vom Betrag von x genommen wird. Somit ergibt sich schließlich:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + C \quad \square$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = \ln(|x|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{1}{x} \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.2.4)}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(|x|) + C \quad \square$$

$$\left(\text{da } \frac{1}{x} \text{ definiert ist in } \mathbb{R} \setminus 0 \text{ und } \ln(x) \text{ in } \mathbb{R} \mid x > 0\right)$$

4.6.5 Stammfunktion der Sinusfunktion

Betrachten wir die Maclaurinreihe der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ erhalten wir das folgende unbestimmte Integral.

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \int x^{2k+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \left(\frac{x^{2k+2}}{2k+2} + C_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k+1)}}{(2k+1)! \cdot (2k+2)} + C_k
\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} + C_k$$

Alle additiven Konstanten $C_1, C_2, dots$ kombinieren wir in eine Konstante C. Die entstandene Reihe hat ähnlichkeiten mit der Maclaurinreihe des Kosinus. Der einzige Unterschied ist, dass die Terme ein Vorzeichen haben, dass umgekehrt ist.

$$\therefore \int \sin(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!} + C = -\cos(x) + C \quad \square$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = -\cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = \sin(x) \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.2.6, 3.3.6)}$$

$$\Leftrightarrow \int \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\cos(x) + C \quad \square$$

4.6.6 Stammfunktion der Kosinusfunktion

Betrachten wir die Maclaurinreihe der Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ erhalten wir das folgende unbestimmte Integral.

$$\begin{aligned}
\int \cos(x)\ \mathrm{d}x &= \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int x^{2k}\ \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C_k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k)! \cdot (2k+1)} + C_k
\end{aligned}$$

$$\int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + C_k$$

Alle additiven Konstanten $C_1, C_2, \ldots$ kombinieren wir in eine Konstante C. Vergleichen wir die erhaltene unendliche Summe mit der Maclaurinreihe der Sinusfunktion (10.3.1) erkennen wir, dass sie bis auf die Konstante C identisch sind.

$$\therefore \int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + C = \sin(x) + C \quad \square$$

Der Beweis über das Differenzieren der Stammfunktion folgt nun:
Sei $F(x) = \sin(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = \cos(x) \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.2.5, 3.3.6)}$$

$$\Leftrightarrow \int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x) + C \quad \square$$

4.6.7 Stammfunktion der Tangensfunktion

Sei $F(x) = \ln(|\sec(x)|) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = \tan(x) \quad \text{(siehe 3.2.1, 3.2.4, 3.3.5)}$$

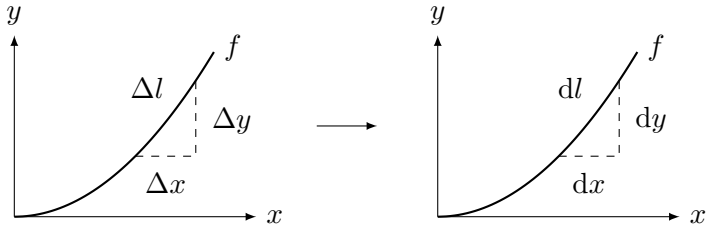
$$\Leftrightarrow \int \tan(x)\ \mathrm{d}x = \ln(|\sec(x)|) + C \quad \square$$

4.7 Bogenlänge und Rotationsvolumen

Bogenlänge

Die Bogenlänge einer Funktion f bezeichnet die tatsächliche Länge ihres Kurvenverlaufs in einem bestimmten abgeschlossenen Intervall $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Die Formel zur Berechnung dieser

Länge leitet sich wiefolgt her:
Sei $f : x \mapsto f(x)$ stetig in $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$. Nun überlege man sich folgendes Dreieck, das durch infinitesimale Betrachtung wahr wird:



$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}l^2 = \left(\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)\mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1\right)}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}l = \int \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1\right)}\mathrm{d}x$$

$$l = \int \sqrt{f'(x)^2 + 1}\mathrm{d}x \quad \square$$

Rotationsvolumen

Das Rotationsvolumen hingegen bezeichnet das Volumen, das entsteht, würde man eine Funktion f in einem bestimmten Intervall $[a; b] \subset \mathbb{R}$ um die Abszisse rotieren lassen.
Sei $f : x \mapsto f(x)$ stetig in $I = [a; b] \subset R$. Man teile nun das Intervall in n kleinere Teilintervalle Δx_i ein. Rotiert nun die

Funktion $f(x)$ um die x-Achse, so könnte man das Volumen mithilfe der Teilintervalle Δx_i in kleine zylindrische Volumina einteilen und es ergibt sich jeweils über Ober- und Untersumme (siehe Kapitel 4.3):

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 h$$

$$\sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i^{\min})^2 \cdot \Delta x_i \leq V \leq \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i^{\max})^2 \cdot \Delta x_i$$

Der jeweilige Grenzwert des "Ober- und Untervolumens" nähert sich an das absolute Volumen an.

$$\lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i^{\min})^2 \cdot \Delta x_i = V = \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i^{\max})^2 \cdot \Delta x_i$$

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i \\ &= \pi \lim_{n\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)^2 \cdot \Delta x_i \quad \text{(siehe 4.3)} \\ &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad \square \end{aligned}$$

4.8 Beweis ausgewählter Volumensformeln

4.8.1 Kegel

Behauptung: Das Volumen eines geraden Kegels der Höhe h und des Grundflächenradius r berechnet sich aus $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Beweis: Sei die Funktion $f(x) = \frac{r}{h}x$ eine Funktion, die den halben Querschnitt eines Kegels beschreibt und die x-Achse

seine Mittelachse. Das Volumen eines Kegels ergibt sich aus dem Rotationsvolumen um die x-Achse von f im Intervall von 0 bis h.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h f(x)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} r^2 \pi h \\ &= \frac{1}{3} A_{\mathrm{G}} h \quad \square \end{aligned}$$

4.8.2 Kugel

Behauptung: Das Volumen einer Kugel des Radius r berechnet sich aus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Beweis: Sei die Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ eine Funktion, die den halben Querschnitt einer Kugel beschreibt (siehe Kapitel 5.4.1). Das Volumen einer Kugel ergibt sich aus dem Rotationsvolumen um die x-Achse von f im Intervall von $-r$ bis r.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r f(x)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^r r^2 \, \mathrm{d}x - \int_0^r x^2 \, \mathrm{d}x \\ &= 2\pi \left[r^2 x\right]_0^r - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \left(r^3 - \frac{1}{3} r^3 \right) \\
&= 2\pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \square
\end{aligned}
$$

4.8.3 Pyramide

Behauptung: Das Volumen einer Pyramide der Höhe h und der quadratischen Grundfläche mit den Maßen $a \cdot a$ berechnet sich aus $V = \frac{1}{3} a^2 h$.

Beweis: Sei die Funktion $f(x) = \frac{a}{h} x$ eine Funktion, die den halben Querschnitt einer Pyramide beschreibt. Man unterteile die Pyramide in n gleichhohe Quader. Deren Volumen ergibt sich aus $V_i = f(x)^2 \cdot \Delta x$. Lässt man die Anzahl der Quader gegen unendlich laufen und summiert jedes Volumen auf, erhält man das gesuchte Volumen:

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x\right)^2 \cdot \Delta x \\
&= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x\right)^2 \cdot \Delta x \\
&= \int_a^b f\left(x\right)^2 \ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^h \left(\frac{a}{h} x \right)^2 \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \\
&= \frac{1}{3} a^2 h \quad \square
\end{aligned}
$$

4.9 Numerische Quadratur

Die numerische Quadratur oder numerische Integration ist ein Verfahren zum Approximieren von bestimmten Integralen. Weil sich nicht für jede Funktion eine Stammfunktion finden lässt, hat dieses Verfahren einen hohen Stellenwert in der Mathematik. Es gibt zwei verschiedene Quadraturverfahren: Graphische und rechnerische Verfahren.

4.9.1 Graphische Verfahren

Diese Verfahren haben einen großen potentiellen Fehler, sind aber praktisch vergleichsweise einfach umzusetzen. Man zeichne den Graphen auf Millimeterpapier oder der gleichen auf und zählt die Kästchen, die sich unter dem Graphen befinden. Mit der Anzahl der Kästchen K ergibt sich:

$$\int_a^b f(x) \approx K\mathrm{mm}^2 \cdot \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\mathrm{mm}^2}$$

Äquivalent dazu können Taschenrechner statt Kästchen Pixel auf dem Bildschirm zählen und darüber eine Näherung bestimmen.

4.9.2 Rechnerische Verfahren durch Quadraturformeln

Für eine genauere Näherung überlegt man sich folgendes:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = Q(f) + E(f)$$

Das Integral der Funktion $f(x)$ im Intervall $I = [a, b]$ ergibt sich aus der Summe einer Quadraturformel $Q(f)$ und dem Fehler $E(f)$ der Quadraturformel. Grundlage der Quadratur

ist die Definition eines bestimmten Integrals mithilfe der RIEMANNsumme, mit der sich jedes bestimmte Integral als Summe unendlich vieler Rechtecke errechnen lässt (siehe Kapitel 4.3). Man unterteilt den Graphen in n gleichgroße Sektionen und berechnet die Summe der entstandenen Teilflächen mithilfe bekannter Formeln für einfache geometrische Flächen, wie zum Beispiel Rechtecke, Trapeze, Sehnen- oder Tangententrapeze. Eine weitere Methode ist, die Funktion mittels Polynominterpolation zu approximieren, denn von Polynomen können sehr einfach Stammfunktionen gebildet werden.

Rechtecksmethode
Hierbei unterteilt man den Graphen in n gleich breite Rechtecke der Länge $f(x_i)$ und der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Summiert man diese erhält man eine Approximation des realen Flächeninhaltes. Je größer n ist, desto genauer wird die Approximation.

$$A = \int_a^b f(x) \approx \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i\right)$$

Sehnentrapezmethode
Für mehr Genauigkeit nutzt man Sehnentrapezmethode, bestehend aus dem Grundrechteck des Flächeninhalts $\Delta x \cdot |x_i - x_{i+1}|$ und einem aufgesetzten Dreieck des Flächeninhalts $\frac{1}{2} \cdot \Delta x \cdot \Delta x_i$. Summiert man diese erhält man:

$$A = \int_a^b f(x) \approx \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(|x_i - x_{i+1}| + \frac{1}{2} \Delta x_i \right)$$

Kepler'sche Fassregel
Möchte man den Flächeinhalt unter einer Kurve in einem pa-

rabelähnlichen Intervall approximieren, ist die nach JOHANNES KEPLER benannte KEPLER'sche Fassregel eine bewährte Methode. Ist f im Intervall $[a, b]$ parabelähnlich und die Punkte des Parabelbogens $P_a = [a|f(a)]$, $P_b = [b|f(b)]$ und $P_{ab} = [\frac{a+b}{2}|f(\frac{a+b}{2})]$ gegeben, so ergibt sich für den Flächeninhalt in diesem Intervall:

$$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Für die Herleitung interpoliert man ein Polynom 2. Grades durch die Punkte P_a, P_b und P_{ab} der Form $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &\approx \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2 + \gamma x\right]_a^b \\
&= \left[\frac{\alpha}{3}b^3 + \frac{\beta}{2}b^2 + \gamma b\right] - \left[\frac{\alpha}{3}a^3 + \frac{\beta}{2}a^2 + \gamma a\right] \\
&= \frac{\alpha}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\beta}{2}(b^2 - a^2) + \gamma(b-a) \\
&= \frac{\alpha}{3}(b-a)(b^2 + ba + a^2) \\
&+ \frac{\beta}{2}(b-a)(b+a) + \gamma(b-a) \\
&= \frac{b-a}{6}\left[2\alpha(b^2 + ba + a^2) + 3\beta(a+b) + 6\gamma\right] \\
&= \frac{b-a}{6}\left[2\alpha a^2 + 2\alpha b^2 + 2\alpha ab + 3\beta a + 3\beta b + 6\gamma\right]
\end{aligned}$$

Für die Koordinaten der Punkte P_n im interpolierten Polynom gilt: $g(a) = \alpha a^2 + \beta a + \gamma$, $g(b) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma$ und $g(\frac{a+b}{2}) = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \beta(\frac{a+b}{2}) + \gamma$. Es gilt, also die o.g. Integralfunktion

von g in $[a,b]$ so umzuformen, dass wir die Punkte für P_a, P_b und P_{ab} erhalten:

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{b-a}{6}\Big[(\alpha a^2+\beta a+\gamma)+(\alpha b^2+\beta b+\gamma)\\ &\quad+(\alpha a^2+\alpha b^2+2\alpha ab+2\beta a+2\beta b+4\gamma)\\ &= \frac{b-a}{6}\left[g(a)+g(b)+4\left(\frac{\alpha a^2}{4}+\frac{\alpha b^2}{4}+\frac{2\alpha ab}{4}+\frac{\beta a}{2}+\frac{\beta b}{2}+\gamma\right)\right]\\ &= \frac{b-a}{6}\left[g(a)+g(b)+4\left(\alpha\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)+\beta\left(\frac{a+b}{2}\right)+\gamma\right)\right]\\ &= \frac{b-a}{6}\left[g(a)+g(b)+4\left(\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{a+b}{2}\right)+\gamma\right)\right]\\ &= \frac{b-a}{6}\left[g(a)+g(b)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

Weil g und f die Punkte P_1, P_2 und P_{12} gemeinsam haben, folgt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &\approx \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= Q(f)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\end{aligned}$$ □

Für das Restglied $E(f)$ gilt, solange f in $[a,b]$ 4-mal stetig differenzierbar ist, die 1887 von Giuseppe Peano aufgestellte Abschätzung

$$E(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}\zeta^4},$$

wobei $a<\zeta<b$ ein unbekannter Wert ist. Auf deren Herleitung wird nicht weiter eingegangen. Die Kepler'sche Formel besagt also in jedem Fall, dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{(b-a)^5}{2880}\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}\zeta^4}$$

Das Auftreten der vierten Ableitung verrät bereits, dass $E(f)=0$ für Polynome bis zum dritten Grad. In diesen Fällen liefert die Kepler'sche Formel exakte Ergebnisse.

4.9.3 Polynominterpolation

Unter einer Interpolation versteht man die Modellierung einer Funktion auf Grundlage gegebener Punkte (beispielsweise aus einer Messreihe). Bei einer Polynominterpolation durch n Punkte ist ein Polynom P gesucht, das jeden dieser Punkte enthält. Entscheident hierbei ist, dass alle Punkte paarweise verschieden sind. P hat dabei höchstens den Grad $n-1$, weil jedes Polynom $(n-1)$-ten Grades genau n Variablen, mit denen lösbare Gleichungssysteme aus n Gleichungen mit n Variablen geschaffen werden können, hat. Die interpolierten Polynome werden unter anderem dafür verwendet, den Flächinhalt unter einer nicht integrierbaren Funktion zu approximieren, denn Polynomfunktionen sind immer und unter wenig Rechenaufwand integrierbar. Auch wegen ihrer einfachen Differenzierbarkeit werden sie zum numerischen Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet. Man sollte jedoch vorsichtig sein: Polynome können die Realität auch verzerren und weniger gute Approximationen liefern - und dabei hilft es nicht immer mehr Stützpunkte zu wählen, ganz im Gegenteil: Beim sogenannten Runges Phänomen kommt es dazu, dass mehr Stützstellen eine ungeneuere Approximation liefern. Man sagt, dass die Interpolationsgüte (ein Maß für die Genauigkeit einer Interpolation) dabei sinkt. Polynome streben im Grenzfall $x \to \pm\infty$ ebenfalls $\pm\infty$ an. Verhält sich die zu interpolierende Funktion im Unendlichen anders, beispielsweise periodisch oder gegen einen Wert konvergierend, treten starke Oszillationen in der Nähe der Intervallgrenzen auf. Mathematiker Runges beschrieb das nach ihm benannte Phänomen mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Intervall $[-5, 5]$ (siehe Abb. 4.1).
Eine Möglichkeit, realistischere und in diesem Sinne genauere Funktionen zu ermitteln, bietet die Spline-Interpolation. Dabei wird eine Funktion durch eine Menge von Punkten

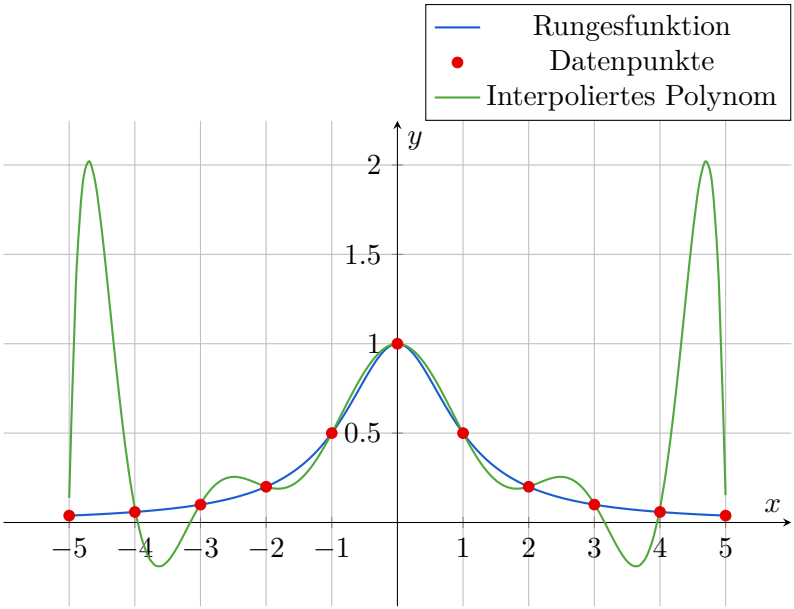


Abb. 4.1: Runges-Phänomen

aus mehreren Polynomen zusammengesetzt. In jedem Intervall (von P_1 zu P_2, von P_2 zu P_3, ... von P_{n-1} zu P_n) wird ein Polynom (bei kubischer Spline-Interpolation besipielsweise dritten Grades) ermittelt, und zwar so, dass dieses nahtlos in das Polynom des nächsten Intervalls übergeht; die entstandene Funktion ist also an jeder Stelle differenzierbar. Eine Polynominterpolation kann in jedem Fall durchgeführt werden, in dem man ein lineares Gleichungssystem aufstellt. Die Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ des Polynoms n-ten Grades $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ entsprechen der Lösung des Gleichungssystems.

Kapitel 5

Lineare Algebra - Geometrie

Das Wort Geometrie leitet sich vom altgriechischen (altgr. *geometria* - "Erdmaße", "Erdmessung", "Landmessung") ab. Die Geometrie beschäftigt sich vereinfacht gesagt mit den Eigenschaften aller Formen, Flächen und Körper in Ebene und Raum.

5.1 Ebene und Raum

Die Geometrie, die wir hier betrachten, hat einen Ort, in dem sie stattfindet: Ebene und Raum. Eine Analogie zur Ebene ist ein Blatt Papier. Nur ist die euklidische Ebene unendlich dünn, und unendlich ausgedehnt. Die euklidische Ebene wird mit der Menge $\mathbb{R}^2$, also aller geordneter Paare (Tupel) reeller Zahlen beschrieben. Sie ist zweidimensional und auf ihr können Objekte bis zur zweiten Dimension (Flächen (2D), Geraden (1D) und Punkte (0D)) abgebildet werden. Dreidimensionale Körper können nicht in einer Ebene abgebildet werden; hierfür ist der euklidische Raum notwendig. Nach Eu-

KLID ist dies der *Raum unserer Anschauung* und kann mit dem Raum, in dem wir leben, verglichen werden. Die Definitionen, Postulate, Axiome und Theoreme des EUKLID über die Geometrie gelten als überholt, weil sie Widersprüche aufweisen. Sie wurden überarbeitet und präzisiert vom deutschen Mathematiker DAVID HILBERT.

5.2 Hilberts axiomatische euklidische Geometrie

Der deutsche Mathematiker DAVID HILBERT verfasste in seinem Werk *Grundlagen der Geometrie* 21 Axiome in 5 Gruppen, mit denen er die euklidische Geometrie (im dreidimensionalen Raum) begründete.

Punkte, Geraden und Ebenen
HILBERT spricht von drei Systemen von Elementen: den sogenannten Punkten, Geraden und Ebenen. Punkte werden in der Regel mit großen lateinischen Buchstaben (A, B, C), Geraden mit kleinen lateinischen (a, b, c) und Ebenen mit griechischen Buchstaben (α, β, γ) notiert. Punkte heißen die Elemente der linearen Geometrie, Punkte und Geraden heißen die Elemente der ebenen Geometrie, und Punkte, Geraden und Ebenen heißen die Elemente der räumlichen Geometrie.

HILBERT definierte: Sei μ eine nichtleere Menge. Die Elemente von μ werden als Punkte bezeichnet. Geraden sind Teilmengen von μ und Bewegungen sind Abbildungen von μ auf sich selbst. Axiome sind dafür da, diesen Elementen gewisse Eigenschaften zuzuordnen.

5.2.1 Axiome der Inzidenz

DAVID HILBERT verwendet viele verschiedene Formulierungen wie P (ein Punkt) liegt auf g (einer Geraden) oder P verläuft durch g, g geht durch P et cetera. Heutzutage benutzen Mathematiker den Ausdruck P *inzidiert* g, welcher gleichnamiges bedeutet. Man notiert dafür "PIg". Die Inzidenz ist die einfachste Relation zwischen geometrischen Elementen. Inzidenz besteht also auch, wenn beispielsweise eine Gerade auf einer Ebene liegt. Die sogenannten Axiome der Inzidenz lauten wie folgt:

1. Zu zwei verschiedenen Punkten $A, B \in \mu$ existiert genau eine Gerade $g \subset \mu$, sodass A und B g inzidieren ($A, B \in g$). Man notiere g, sodass A und B auf g verlaufen wie folgt: $g(A, B)$

2. Eine Gerade kann stets von zwei verschiedenen auf ihr liegenden Punkten bestimmt werden.

3. Auf jeder Geraden gibt es mindestens zwei verschieden Punkte; auf einer Ebene mindestens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte. Existieren drei Punkte $A, B, C \in \mu$, welche nicht auf einer gemeinsamen Gerade liegen, heißen sie nicht *kollinear*. A, B, C sind nur dann kollinear, wenn sie auf einer gemeinsamen Gerade liegen ($\exists g \subset \mu : A, B, C \in g$)

4. Drei nicht kollineare Punkte bestimmen stets eine Ebene.

5. Eine Ebene kann stets von drei nicht kollinearen Punkten bestimmt werden.

6. Inzidieren die Punkte $A, B \in \mu$ die Gerade g der Ebene α, so inzidiert jeder Punkt von g α

7. Haben die Ebenen α und β den Punkt A gemeinsam, so existiert mindestens ein weiter Punkt B, welcher α und β inzidiert.

8. Es existieren vier Punkte, welche nicht eine gemeinsame Ebene inzidieren.

Diese Axiome lassen folgende Aussagen folgern: (a) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich entweder in einem oder in keinem Punkt. (b) Zwei Ebenen scheiden sich in entweder einer oder keiner Geraden. (c) Eine Ebene und ein Punkt, welche die Ebene nicht inzidiert, schneiden sich in genau einem oder keinem Punkt. (d) Eine Ebene kann durch eine Gerade und einen nicht die Gerade inzidierenden Punkt bestimmt werden. (e) Eine Ebene kann durch zwei sich inzidierende Geraden bestimmt werden.

Parallelität An der Stelle kann man den Begriff der Parallelität definieren: $g, h \in \mu, g \neq h$ sind zwei verschiedene Geraden. Diese haben höchstens einen Punkt gemeinsam. Haben g und h keinen gemeinsamen Punkt, so verlaufen sie *parallel*. Man notiere: $g||h$.

5.2.2 Axiome der Anordnung

In den Axiomen der Anordnung geht Hilbert auf den Begriff des *dazwischen*seins ein. Ist die Rede von drei Punkten, von denen einer zwischen den anderen liegt, ist damit stets gemeint, dass diese Punkte verschieden sind und eine gemeinsame Gerade inzidieren. Für vier existierende Punkte $A, B, C, D \in \mu$ gilt:

1. Liegt B zwischen A und C, so liegt B auch zwischen C und A

2. Es existiert mindestens ein Punkt B, welcher zwischen A und C liegt, sowie ein Punkt D, sodass C zwischen A und D liegt.

3. Unter drei beliebigen Punkten $A, B, C \in g$ auf der Gerade g gibt es stets exakt einen, der zwischen den anderen beiden liegt.

Strecke Eine Strecke AB oder $\overrightarrow{AB}$ ist die Menge aller Punkte, welche zwischen A und B liegen. Die Strecke BA ist gemäß dieser Definition dieselbe.

Axiom von PASCH:

4. Drei nicht kollineare Punkte $A, B, C \in \mu$ und eine Gerade g, die die Ebene ABC inzidiert, aber keinen der Punkte A, B oder C, seien gegeben. Inzidiert g einen Punkt der Strecke AB, so indidiert sie zwangsweise einen Punkt der Strecke BC oder AC.

Aus den Axiomen der Inzidenz und den Axiomen der Anordnungen lassen sich zwei große Eigenschaften folgern. Zum einen liegen zwischen zwei Punkten einer Gerade unendliche viele weitere Punkte. Hier spricht man auch davon, dass Punkte einer Gerade *in sich dicht* sind. Zum zweiten lässt sich folgern, dass jene Gerade, die von einer Ebene inzidiert wird, diese in zwei Gebiete aufteilt. Gleiches gilt für jene Ebene, welche den Raum in je zwei Gebiete teilt.

5.2.3 Axiome der Kongruenz

Der Begriff Kongruenz kann übersetzt werden mit *gleich* oder (bei Strecken) *gleich lang*. Als Zeichen der Kongruenz verwendet HILBERT $\equiv$

1. Wenn A und B zwei Punkte auf einer Geraden a sind und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen Punkt B' finden, sodass die Strecke AB der Strecke $A'B'$ kongruent ist: $AB \equiv A'B'$. Des Weiteren ist sich jede Strecke selbst kongruent, das heißt: $AB \equiv AB$ und $AB \equiv BA$. Mit anderen Worten kann von jedem Punkt aus jede beliebige Strecke abgetragen werden. Aus den Axiomen I-III lässt sich nun beweisen, dass wenn $AB \equiv A'B'$ stets auch $A'B' \equiv AB$ und eine jene Abtragung eindeutig ist. Die Kongruenzrelationen sind also *reflexiv* und *symmetrisch* (siehe 9.3.3).

2. Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ kongruent ist, so ist auch $A'B'$ und $A''B''$ kongruent. Die Kongruenzrelation ist also *transitiv* (siehe 9.3.3). Damit ist Kongruenzrelation eine *Äquivalenzrelation* (symmetrisch, reflexiv und transitiv)

3. Seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch $AC \equiv A'C'$. Bei der Addition zweier Stecken, bleibt die Kongruenz also erhalten.

Es sei α eine beliebige Ebene und h, k seien zwei verschiedene von einem Punkt O ausgehende Halbstrahlen in α, die verschiedenen Geraden angehören. Das System dieser beiden Halbstrahlen h, k nennen wir einen Winkel und bezeichnen denselben mit $\sphericalangle(h, k)$ oder mit $\sphericalangle(k, h)$ Aus den Axiomen II 1—4 kann leicht geschlossen werden, dass die Halbstrahlen h und k, zusammengenommen mit dem Punkt O die übrigen

Punkte der Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit teilen: Ist A ein Punkt des einen und B ein Punkt des anderen Gebietes, so geht jeder Streckenzug, der A mit B verbindet, entweder durch O oder hat mit h oder k wenigstens einen Punkt gemein; sind dagegen A, A' Punkte desselben Gebietes, so gibt es stets einen Streckenzug, der A mit A' verbindet und weder durch O, noch durch einen Punkt der Halbstrahlen h, k hindurchläuft. Eines dieser beiden Gebiete ist vor dem anderen ausgezeichnet, indem jede Strecke, die irgend zwei Punkte dieses ausgezeichneten Gebietes verbindet, stets ganz in demselben liegt; dieses ausgezeichnete Gebiet heiße das *Innere des Winkels* (h, k) zum Unterschied von dem anderen Gebiet, welches das *Äußere der Winkels* (h, k) genannt werden möge. Die Halbstrahlen h, k heißen Schenkel des Winkels und der Punkt O heißt der Scheitel des Winkels.

4. Es sei ein Winkel $\sphericalangle(h, k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a' einen und nur einen Halbstrahl k', sodass der Winkel $\sphericalangle(h, k)$ kongruent oder gleich dem Winkel $\sphericalangle(h', k')$ ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels $\sphericalangle(h', k')$ auf der gegebenen Seite von a liegen, in Zeichen: $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$. Jeder Winkel ist sich selbst kongruent, das heißt, es gilt stets $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$.

5. $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k') \wedge \sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h'', k'') \implies \sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'')$. Die Winkelkongruenz ist also ebenfalls stets symmetrisch und transitiv.

6. Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\sphericalangle(BAC) \equiv \sphericalangle(B'A'C')$ gelten, so sind stets die Kongruenzen $\sphericalangle(ABC) \sphericalangle(A'B'C')$ und $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle(A'C'B')$ erfüllt.

Bei Letzterem handelt es sich um den von HILBERT als Axiom festgelegten Kongruenzsatz *sws* für Dreiecke. Er konnte zeigen, dass dieser als Axiom unentbehrlich sei (entgegen den Erwartungen von EUKLID) und nicht aus den vorherigen Axiomen gefolgert werden könne. Die anderen Kongruenzsätze aber können aus den Axiomgruppen I-III nun bewiesen werden. Ferner lässt sich beweisen, dass alle rechten Winkel zueinander kongruent sind.

5.2.4 Axiom der Parallelen

Das Axiom der Parallelen oder auch EUKLIDISCHES Axiom lautet wie folgt:

1. Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb von a; dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene α nur einer Gerade b, die durch A läuft und a nicht schneidet; dieselbe heißt *Parallele* zu a durch A. *Parallel* bedeutet also, dass die Geraden in einer Ebene liegen, aber keinen gemeinsamen Punkt haben.

Dieses ist das meistdiskutierteste Axiom der hilbertschen Geometrie unter dem Schlagwort *Parallelenproblem*. An der Stelle wird nicht weiter darauf eingegangen.

5.2.5 Axiome der Stetigkeit

Axiom des Messens oder ARCHIMEDISCHES **Axiom**:

1. Es sei A_1 ein beliebiger Punkt auf einer Geraden zwischen den beliebig gegebenen Punkten A und B. Man konstruiere dann die Punkte $A_2, A_3, A_4, ...$, sodass A_1 zwischen A und A_2, A_2 zwischen A_1 und A_3, A_3 zwischen A_2 und A_4 et cetera liegt und ferner die konstruierten Strecken gleich lang sind: dann gibt es in der Reihe stets einen Punkt A_n, sodass B zwischen A und A_n liegt.

Jede noch so große Strecke lässt sich also durch Aneinanderreihung jener noch so kleinen Strecke übertreffen. Man könnte sagen: "Es gibt keine 'unendlich kleinen' oder 'unendlich großen' Strecken".

Axiom der Vollständigkeit:

2. Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist, das heißt zu dem System der Punkte, Geraden, Ebenen ist es nicht möglich, ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, sodass in dem durch Zusammensetzung entstehenden System sämtliche aufgeführten Axiome I - IV und V.1 erfüllt sind.

Die hier durch DAVID HILBERT beschriebene euklidische Geometrie ist also die größt-mögliche. Sie ist wie die reellen Zahlen *vollständig*. Als Modell der euklidischen Geometrie nutzt die analytische die Menge des $\mathbb{R}^3$ (die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen).

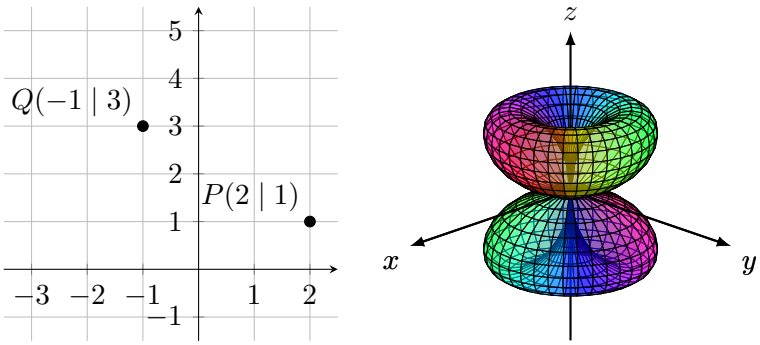
HILBERT bewies, dass sein Axiomensystem widerspruchsfrei ist, unter der Annahme, dass die reellen Zahlen widerspruchsfrei sind. Sein Ziel war es, die Axiome so aufzubauen, dass diese logisch unabhängig voneinander sind. Das heißt, dass keines der Axiome entbehrlich ist, weil es sich durch eine logische Folgerung der anderen Axiome beweisen lässt. Jedes andere beliebige geometrische Gesetz kann mithilfe dieser Axiome und logischer Schlussfolgerungen bewiesen werden. Dies wäre für unsere Zwecke ein zu langer, aufwendiger und komplexer Prozess. Die HILBERT'sche Axiomatik soll deshalb im Weiteren keine Rolle mehr spielen und diente als Exkurs in die Tiefen der Mathematik.

5.3 Koordinatensysteme

Bei der vielen Theorie ist eines nicht zu vernachlässigen: Für die Visualisierung von Punkten, Geraden, Strecken, Ebenen und Körpern ist ein Koordinatensystem unentbehrlich. Streng genommen werden nur Punkte (als Koordinaten) dargestellt. Der Begriff *Koordinate* leitet sich vom Wort *Ordinate* - "Senkrechte" ab und gibt damit bereits einen Hinweis auf den Charakter des kartesischen Koordinatensystem. Für Objekte n-ter Dimension sind n Koordinaten für die Darstellung notwendig. So hat ein Punkt auf einer Ebene zwei Koordinaten, während er im Raum drei hat. Der Punkt, dessen Koordinaten alle Null sind, wird als Koordinatenursprung bezeichnet. Für gewöhnlich nutzt man die Zahlengerade beziehungsweise das planare oder räumliche kartesische Koordinatensystem. Neben diesen Bekannten gibt es noch andere Koordinatensysteme. Anzuführen sind insbesondere das Polarkoordinatensystem, das Elliptische Koordinatensystem und das affine Koordinatensystem. Solche Koordinatensysteme widersprechen dem Raum unserer Anschauung, was sie zu rein theoretischen Systemen macht. Sie haben aber bei besonderen Anwendungen große Vorteile, auf die im Weiteren nicht eingegangen wird; wir beschränken uns auf die folgenden beiden. Koordinatensysteme können verzerrt und gekrümmt werden (siehe Kapitel 6.2).

Die Zahlengerade: Das wohl einfachste Koordinatensystem ist die reelle Zahlengerade. Sie sollte einem schon seit der Grundschule bekannt sein. Man wählt einen beliebigen Punkt O auf einer Geraden als Koordinatenursprung. Von dort aus werden die Punkte mit betragsmäßigem Abstand zu O auf der Gerade abgebildet, wobei positive Zahlen rechts und negative Zahlen links von O liegen.

Das Kartesische Koordinatensystem:



(a) Zweidimensional (b) $r = \sin(\theta)\cos(\theta)$

Abb. 5.1: Kartesisches Koordinatensystem

Dieses Koordinatensystem ist nach dem latinisierten Namen "Cartesius" des französischen Mathematikers Rene Decartes benannt, dessen Geburtsort übgrigens nach ihm benannt wurde. Ein Synonym für das Kartesische Koordinatensystem (im Weiteren mit KK abgekürzt) ist *orthogonales* Koordinatensystem. Es heißt so, weil die Achsen in einem rechten Winkel zueinander stehen. Wegen der hohen Praktikabilität aufgrund der Übereinstimmung mit dem Raum unserer Anschauung ist das Kartesische das am häufigsten verwendete Koordinatensystem. Ist die Rede von einem "Koordinatensystem", ist damit in der Regel das Kartesische gemeint. Im Zweidimensionalen hat es zwei und im Dreidimensionalen drei Achsen. Die horizontale Achse des zweidimensionalen KK wird Abszissenachse und die vertikale Ordinatenachse genannt. Diese erhalten für gewöhnlich die Abkürzungen x und y. Die dritte Achse wird als z-Achse bezeichnet. Die Achsen sind wie Zahlengeraden zu interpretieren, die orthogonal zueinander ver-

laufen. Die Darstellung der Punkte $P(2 \mid 1)$ und $Q(-1 \mid 3)$ im KK findet sich in Abb. 5.1a.

5.4 Flächen

Eine Fläche ist eine zweidimensionale Teilmenge des dreidimensionalen Raumes. Flächen können eben (in einer Ebene) oder gekrümmt (beispielsweise die Oberfläche einer Kugel) sein. Als Maß zur Bestimmung der Größe einer Fläche dient der Flächeninhalt. Dieser hat die Dimension L^2 (beispielsweise m^2).

5.4.1 Kreis

Definition: Ein Kreis ist die Menge $X \subset E$ aller Punkte in einer Ebene E, die alle den gleichen Abstand (Radius) zu einem beliebigen Mittelpunkt $M \in E$ haben. Der doppelte Radius wird Durchmesser genannt. Diese Definition des Kreises lässt auch folgende Darstellung zu:

$$X = \left\{(x, y) \in E : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2\right\}$$

Ausformuliert ist ein Kreis die Menge aller Tupel (x, y), die Element der Kreisebene E (beispielsweise der Ebene $\mathbb{R}^2$) sind, die alle den gleichen Abstand r zu einem gemeinsamen Mittlepunkt $M(x_M \mid y_M)$ haben. Hinter der Abstandsbedingung $r^2 = (x-x_M)^2+(y-y_M)^2$ steht der Satz des Pythagoras. Solche Gleichungen nennt man *Koordinatengleichungen*. Wichtig ist zu verstehen, dass es sich dabei nicht um eine Funktion von r handelt. Ein Kreis ist keine eindeutige Zuordnung und nur mithilfe von Koordinatengleichungen im kartesischen Koordinatensystem darstellbar.

Ein Spezialfall stellt der sogenannte *Einheitskreis* mit dem Radius $r = 1$ dar, der über die Koordinatengleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschrieben werden kann.

Folgt man der Kreisdefinition, ist der Kreis ein eindimensionales Gebilde - keine Fläche. In der Umgangssprache hat sich jedoch etabliert mit "Kreis" sowohl die Begrenzlinie als auch deren eingeschlossene Fläche zu meinen. Um Missverständnisse vorzubeugen, benutzt man stattdessen die Begriffe *Kreislinie* oder *Kreisrand*.

Besondere Geraden: Für die Betrachtung von Geraden im Zusammenhang mit Kreisen gibt es drei Fälle. Passanten sind Geraden, welche die Kreislinie gar nicht tangieren (lat. *tangere* - "berühren"), Sekanten berühren die Kreislinie in genau zwei Punkten und Tangenten in genau einem Punkt. Abb. 5.3a veranschaulicht dies. Im Folgenden soll bewiesen werden, dass eine Tangente immer orthogonal zum Radius steht. Abb. 5.2 veranschaulicht die Überlegungen.

Gegeben sei der Kreis X mit

$$X = \left\{(x, y) \in E : (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2\right\}$$

Behauptung: Jede an den Kreis anliegende Tangente steht orthogonal zum Radiusvektor, der den Mittelpunkt M und den tangierten Punkt P verbindet.

Beweis: Wenn die Normale an jedem P M schneiden würde, hätte das die Schlussfolgerung zur Folge, dass die Behauptung wahr ist. Wir teilen den Kreis in zwei Hälften an seinem horizontalen Durchmesser. Die obere Kreishälfte kann durch die Funktion $y(x, r) = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} + y_M$ und die untere durch $-y(x, r)$ beschrieben werden. Im Folgenden wird nur

die obere Kreishälfte betrachtet. Rechenschritte für die Untere sind analog. Die Normale y_N an P ist gegeben durch die Funktion

$$y_N = -\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}x + b$$

Für die partielle Ableitung von y nach x ergibt sich: $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-x_M}{\sqrt{r^2-(x-x_M)^2}}$. Die Normale verläuft durch den Punkt $P(x_0 \mid y(x_0, r))$ mit $x_0 \in \mathbb{R} : x_M - r \leq x_0 \leq x_M + r$:

$$y_N(x) = \frac{\sqrt{r^2-(x_0-x_M)^2}}{x_0-x_M}(x-x_0) + \sqrt{r^2-(x_0-x_M)^2} + y_M$$

Für die Punktprobe mit x_M ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_N(x_M) &= \frac{\sqrt{r^2-(x_0-x_M)^2}}{x_0-x_M}(x_M-x_0) \\ &\quad + \sqrt{r^2-(x_0-x_M)} + y_M \\ &= \sqrt{r^2-(x_0-x_M)^2}\left(\frac{x_M-x_0}{-(x_M-x_0)}+1\right) + y_M \\ &= \sqrt{r^2-(x_0-x_M)^2}(0) + y_M \\ &= y_M \quad \square \end{aligned}$$

Somit liegt M auf der Normalen von P an X und damit ist die Behauptung wahr.

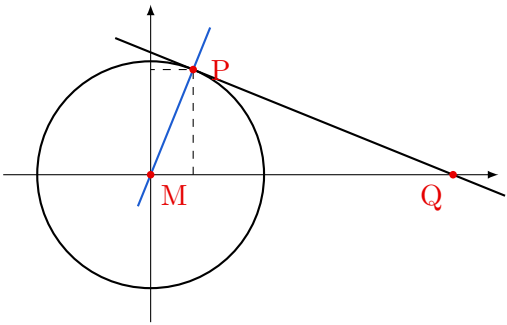
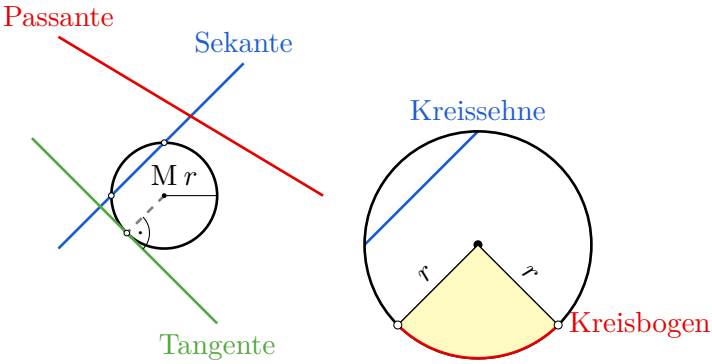


Abb. 5.2: Normale an einen beliebigen Kreis schneidet den Mittelpunkt

Weitere Begriffe: Eine zusammenhängende Teilmenge der gesamten Kreislinie nennt man Kreisbogen. Kreissehnen sind Strecken zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Kreislinie. Der Durchmesser ist der Sonderfall der Kreissehne. Er verläuft durch den Mittelpunkt und ist damit die längstmögliche Kreissehne. Als Kreissegment bezeichnet man jene Fläche, die zwischen einer beliebigen Kreissehne und der Kreislinie eingeschlossen wird. Unter Kreissektor ist hingegen die Fläche zu verstehen, welche von zwei Radien und der dazwischenliegenden Kreislinie begrenzt wird. Liegen die Radien in einem Winkel von $\alpha = 180°$ zueinander, nennt man den dabei entstanden Sektor Halbkreis; im Fall $\alpha = 90°$ spricht man vom Viertelkreis. Ein sogenannter *Kreisring* entsteht, wenn man aus dem ursprünglichen Kreis einen kleineren Kreis (vom selben Mittelpunkt aus) "herausschneidet".

Umfang: Das Verhältnis zwischen Umfang U und Durchmesser d eines Kreises ist aus Gründen der Ähnlichkeit konstant. Diese Konstante ist transzendent und definiert als π. Somit gilt: $U = \pi d$.



(a) Kreisgeraden (b) Kreisbereiche

Abb. 5.3: Der Kreis

Flächeninhalt: Es gibt sehr viele Methoden den Flächeninhalt A (engl. *area* - "Fläche") eines Kreises zu bestimmen. Drei davon werden im Folgenden betrachtet.

(1) Als erstes überlegen wir uns eine intuitive Möglichkeit. Man teile den Kreis in n gleichgroße Kreissektoren und legt diese alternierend nebeneinander. Das heißt Radius an Radius beginnt man mit der Spitze nach unten, fährt fort mit der Spitze nach oben, dann wieder nach unten und so weiter. Lässt man nun n gegen unendlich laufen (unendlich viele Sektoren), so werden die einzelnen Sektoren immer schmaler (in der Breite) und das Artefakt der Bogenkrümmung verschwindet. Es entsteht ein Rechteck, dessen kürzere Seite der Radius r und dessen längere Seite der die Hälfte des Umfangs, also $\frac{1}{2}\pi d$, bzw. πr ist. Diese Fläche ist das Produkt der beiden Seitenlängen: $A = r \cdot \pi r = \pi r^2 \quad \square$.

(2) Die zweite Methode ist analytischer und exakter. Es ist

bekannt, dass Kreise mit Koordinatengleichungen dargestellt werden können. Der Mittelpunkt wird als Koordinatenursprung angenommen, weil dessen Position den Flächeninhalt nicht beeinflusst. Für den Halbkreis über dem horizontalen Durchmesser ergibt sich als Funktion von y:

$$y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Man beachte, dass diese Funktion aufgrund des Eindeutigkeitskriteriums von Funktionen nur die Hälfte des Kreises darstellt. Das doppelte Integral von $-r$ bis r ergibt A:

$$A = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x$$

Zum Ermitteln der Stammfunktion substituiert man
$x = r\sin(u) \Longleftrightarrow \mathrm{d}x = r\cos(u)\ \mathrm{d}u$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x &= \int \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(u)}\ r\cos(u)\ \mathrm{d}u \\
&= \int \sqrt{r^2(1 - \sin^2(u))}\ r\cos(u)\ \mathrm{d}u \\
&= \int r\cos(u)\ r\cos(u)\ \mathrm{d}u \\
&= r^2 \int \cos^2(u)\ \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Mithilfe trigonometrischer Identitäten , Additionstheoreme oder partieller Integration für $\int \cos^2(u)\ \mathrm{d}u$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{r^2 - x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{r^2}{2}(\sin(u)\cos(u) + u) \\
&= \frac{r^2}{2}\left(\frac{x}{r}\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right) + \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right) \\
A &= 2\left(\frac{r^2}{2}\left(\frac{r}{r}\cos\left(\arcsin\left(\frac{r}{r}\right)\right) + \arcsin\left(\frac{r}{r}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{r^2}{2}\left(-\frac{r}{r}\cos\left(\arcsin\left(-\frac{r}{r}\right)\right) + \arcsin\left(-\frac{r}{r}\right)\right) \\
&= r^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= r^2\left(0 + \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi r^2 \quad \square
\end{aligned}
$$

(3) Die letzte Methode ähnelt der ersten. Dafür wird der Kreis in n gleiche, gleichschenklige Dreiecke aufgeteilt, deren Schenkel die Seitenlänge r haben. So ergibt sich für den Winkel zwischen den beiden Seiten mit Länge r die Größe $\gamma = \frac{2\pi}{n}$ für $n \in \mathbb{N}_+$. Es ergibt sich für die Fläche eines der entstandenen SWS (Seite-Winkel-Seite) Dreiecke:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(\gamma)$$

Durch das Aufsummieren der n Dreiecksflächen erhalten wir eine Approximation für die Kreisfläche A, die immer genauer wird, je höher n ist. Wollen wir eine Formel, um den exakten Wert von A zu bestimmen, müssen wir $n \to \infty$ laufen lassen:

$$
\begin{aligned}
A &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Um diesen Grenzwert zu lösen benutzen wir im Folgenden die Taylorreihe der Sinusfunktion:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(\sin(x))(x,0) = \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2\pi^{2k+1}}{n^{2k+1}(2k+1)!} \\
&= \frac{2\pi}{n} - \frac{8\pi^3}{6n^3} + \frac{32\pi^5}{120n^5} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^7\right) \\
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2\pi^{2k+1}}{n^{2k+1}(2k+1)!} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{8\pi^3}{6n^3} + \frac{32\pi^5}{120n^5} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^7\right) \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{8\pi^3}{6n^3} + \frac{32\pi^5}{120n^5} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^7\right) \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2\pi}{n} - \frac{8\pi^3}{6n^3} + \frac{32\pi^5}{120n^5} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^7\right) \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(2\pi - \frac{8\pi^3}{6n^2} + \frac{32\pi^5}{120n^4} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^6\right) \right) \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2\pi^{2k+1}}{n^{2k}(2k+1)!} \\
&= \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi \\
&= \pi r^2 \quad \square
\end{aligned}
$$

Der Einheitskreis: Der Einheitskreis ist definiert als der Kreis, dessen Radius exakt Eins ist und dessen Mittelpunkt auf dem Koordinatenursprung des kartesischen Koordinatensystems der Ebene liegt:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Am Einheitskreis nehmen die trigonometrischen Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens eine besondere Stellung ein. Man definiere φ als den Winkel, der zwischen der Abszissenachse und einer Strecke vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Punkt P auf der Kreislinie liegt. Zieht man eine Stecke y von P orthogonal zur x-Achse, so entsteht ein

rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse der Radius, also eins, ist und dessen Katheten wir als x und y bezeichnen. Es gilt nun:

$$\sin(\varphi) = y \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = x$$

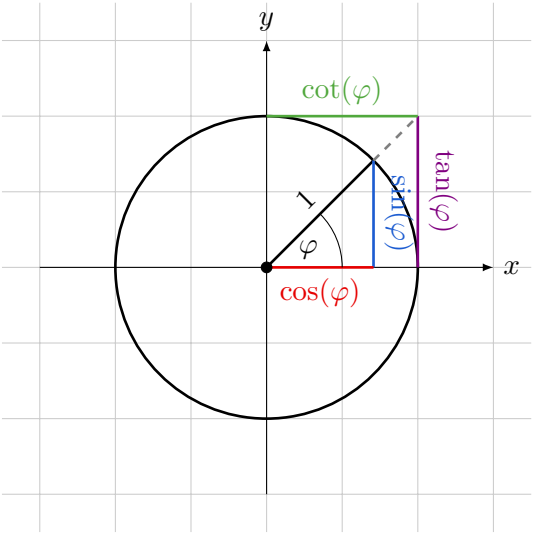


Abb. 5.4: Einheitskreis

5.4.2 Dreieck

Definition: Ein Dreieck ist ein Polygon. Es ist definiert als geometrische Figur einer Ebene bestehend aus drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Punkte werden als Ecken bezeichnet und meist mit den Großbuchstaben ABC entgegen des Uhrzeigersinnes benannt. Die drei Strecken zwischen den Ecken nennt man Seiten. Sie werden mit Kleinbuchstaben abc bezeichnet.

Innenwinkelsumme: Die Innenwinkelsumme jedes Dreiecks beträgt stets 180°. Ein geometrischer Beweis ist in Abb. 5.5 zu sehen. Man beachte hierbei, dass jeder Winkel auf der Geraden als 180° bzw. π definiert ist (Halbkreis). Die Summe aller Außenwinkel 720°.

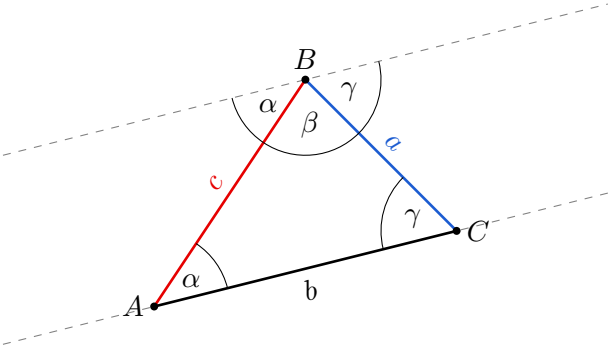


Abb. 5.5: Innenwinkelsumme eines Dreiecks

Dreiecksungleichung: Die Dreiecksungleichung besagt, dass die Summe zweier Seiten a, b eines Dreiecks stets größer (oder gleich) der dritten Seite c ist.

$$c \leq a + b$$

Nur wenn a und b Teilstrecken von c sind, ist die Summe gleich der Seite c. In diesem Fall spricht man von einem entarteten Dreieck.

Kongruenzsätze: Die Kongruenzsätze sind Regelmäßigkeiten, mit denen sich die Kongruenz von Dreiecken auf eindeutige Weise bestimmen lassen. Kongruente Dreiecke können als *gleich* angesehen werden, weil die Dreieckskongruenz eine Äquivalenzrelation bildet. Dreiecke sind dann kogruent, wenn sie in Form und Flächeninhalt übereinstimmen. Die Namen der

Kongruenzsätze sind Akronyme aus drei der Buchstaben S (für Seite) und W (für Winkel).

1. **SSS**: Stimmen die drei Seiten zweier Dreiecke in ihrer Länge überein, sind diese kongruent. Beweis: Gegeben sind die Strecken a, b, c. Man zeichne die Strecke a, also $\overrightarrow{BC}$. Nun konstruiere man um B einen Kreis des Radius von b und um C einen Kreis des Radius von c. Es entstehen genau zwei Intersektionen. Diese bezeichnen wir A_1 bzw. A_2. Zwei Dreiecke A_1BC und A_2BC sind entstanden, die eindeutig konstruierbar sind.

2. **SWS**: Stimmen zwei Seiten und der in ihnen eingeschlossene Winkel eines Dreiecks überein, sind diese kongruent. Beweis: Gegeben seien die Seiten a, b und der eingeschlossene Winkel γ. Man zeichne zwei Halbgeraden bzw. Strahlen, die im Winkel γ zueinanderstehen. Der Scheitelpunkt ist C. Zur Ermittlung von A und B trägt man je die Länge von a und b auf den Strahlen ab. Verbindet man die entstandenen Punkte A und B miteinander, erhält man Strecke c. Bemerkung: Dieser Kongruenzsatz ist in Hilberts Axiomen der Geometrie verankert.

3. **SSW**: Stimmen zwei Seiten und der Winkel zwischen der längeren Seite und der dritten Seite zweier Dreiecke überein, sind diese kongruent. Gegeben seien die Seiten b und c mit $b \leq c$ und der Winkel γ. Man konstruiere zwei Strahlen, die mit C als Scheitel γ einschließen. Nun trage man auf einem Schenkel die Strecke b ab, um A zu erhalten. Der Kreis um A mit Radius c schneidet im Punkt B den anderen Schenkel.

4. **WSW**: Stimmen zwei Winkel und die eingeschlossene Seite zweier Dreiecke überein, sind diese kongruent. Be-

weis: Gegeben seien die Strecke a bzw. BC und die Winkel β sowie γ. Man zeichne die Strecke b. An den Enden von b trägt man je eine Gerade im Winkel β bzw. γ zu b ab. Der Schnittpunkt der zwei Geraden ist A.

Satz des Pythagoras: Der Satz des PYTHAGORAS ist wohl der bekannteste Satz der Mathematik im Zusammenhang mit Dreiecken. Zusammen mit dem Höhen- und Kathetensatz des EUKLID bildet er die Satzgruppe des PYTHAGORAS. Er besagt, dass die Summe der Kathetenquadrate in einem rechtwinkligen Dreieck gleich dem Hypotenusenquadrat ist. Für das Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ gilt demnach:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Auch für den Satz des Pythagoras gibt es eine große Vielfalt an Beweisen. Ein geometrischer Beweis sieht wie folgt aus:

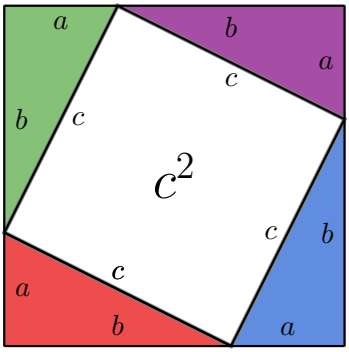


Abb. 5.6: Geometrischer Beweis des Satzes des PYTHAGORAS

Flächeninhalt des großen Quadrates berechnet sich aus $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man schließt auf c^2 indem man die grauen Flächen vom großen Quadrat abzieht. $c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 4\left(\frac{1}{2}ab\right) = a^2 + b^2$ $\square$

Höhensatz des Euklid: Der Höhensatz des EUKLID besagt für jedes rechtwinklige Dreieck mit den Seiten a, b und c sowie den Hypotenuseabschnitten p und q und der Höhe h, dass

$$h^2 = p \cdot q$$

p bzw. q sind diejenigen Teilstrecken der Hypotenuse c, die durch deren Teilung am Lotfußpunkt der Höhe h entstehen.

Beweis: Laut Satz des PHYTHAGORAS gilt in dem oben beschriebenen Dreieck $a^2+b^2 = c^2$, $h^2+p^2 = a^2$ sowie $h^2+q^2 = b^2$. Außerdem gilt $c = p + q$ und damit $c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$. Weil $c^2 = a^2 + b^2$ gilt $c^2 = h^2 + p^2 + h^2 + q^2$ und somit $p^2+2pq+q^2 = h^2+p^2+h^2+q^2$, woraus folgt, dass $h^2 = pq$ $\square$

Kathetensatz des Euklid: Seien a, b und c die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, mit c als Hypotenuse. Der Lotfußpunkt teilt die Hypotenuse in die Strecken p und q. Nun gilt: (1) Das Quadrat über a ist flächeninhaltsgleich zum Rechteck pc. $a^2 = pc$ (2) Das Quadrat über b ist flächeninhaltsgleich zum Rechteck qc. $b^2 = qc$

Beweis: Aus dem Dreieck ABC samt h, p, q gehen folgende Beziehungen hervor: $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 = h^2 + p^2$, $b^2 = h^2 + q^2$ und $c = p + q$. Somit gilt:

$$a^2 = c^2-b^2 = p^2+2pq+q^2-h^2-q^2 = p^2+2pq+q^2-a^2+p^2-q^2$$

Daraus ergibt sich, dass:

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2p^2 + 2pq \\ &= 2p(p - q) \\ &= 2pc \end{aligned}$$

$$a^2 = pc \quad \square$$

Analog hierzu erfolgt der Beweis für $b^2 = qc$.

Trigonometrie des Dreiecks: Bestimmte Seiten- und Winkelverhältnisse sind im rechtwinkligen Dreieck immer gleich. Demnach gilt für jedes rechtwinklige Dreieck:

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Sinussatz: Der Sinussatz für allgemeine Dreiecke besagt, dass sich die Verhältnisse von Gerade zum Sinus des gegenüberliegenden Winkel gleichen. Demnach gilt immer:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Für den Beweis betrachtet man ein Dreieck ABC und zieht seine Höhe h_c über C. Zwei rechtwinklige Teildreiecke sind entstanden. Für diese gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b}$ und $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a}$. Stellt man beide Gleichungen nach h_c um und setzt diese gleich, erhält man $a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$. Umgestellt bedeutet das $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$ $\square$
Analog hierzu führt man den Beweis für die anderen Seiten mit h_a und h_b.

Kosinussatz: Der Kosinussatz ist eine Erweiterung des Satzes des Pythagoras und gilt für das allgemeine Dreieck ABC wie folgt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

Für den Beweis betrachtet man das Dreieck ABC und zeichnet die Höhe h_c über C ein. Es entstehen zwei Dreiecke. Es gilt: $c = a\cos(\beta) + b\cos(\alpha)$ also auch $c^2 = ac\cos(\beta) + bc\cos(\alpha)$. Analog hierzu erhält man mit den Höhen h_a und h_b: $a^2 = a^2 = ac\cos(\beta) + ab\cos(\gamma)$ sowie $b^2 = bc\cos(\alpha) + ab\cos(\gamma)$. Addiert man beide Gleichungen, erhält man

$$a^2 + b^2 = ac\cos(\beta) + bc\cos(\alpha) + 2ab\cos(\gamma)$$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) = ac\cos(\beta) + bc\cos(\alpha)$$

Setzt man dies mit einer der vorherigen Gleichungen gleich, kommt man auf:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \quad \square$$

Umfang: Der Umfang eines Dreiecks berechnet sich aus der Summe seiner Seitenlängen $u = a + b + c$.

Flächeninhalt: Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt im allgemeinen $A = \frac{1}{2}c \cdot h_c$. Die Höhe kann man durch $h_c = \sin(\alpha) \cdot b$ substituieren. Demnach gilt für allgemeine Dreiecke:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$

Besondere Dreiecke:

- Ein Dreieck, das einen rechten Winkel hat, wird *rechtwinklig* genannt. In ihm gilt der Satz des Pythagoras. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks ABC mit $\gamma = \sphericalangle ACB = 90°$ ergibt sich mit der Formel für den Flächeninhalt eines allgemeinen Dreickes: $A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Weil $\sin 90° = 1$ gilt $A = \frac{1}{2}ab$.

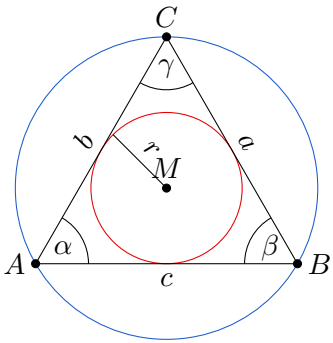


Abb. 5.7: Gleichseitiges Dreieck

- Ein Dreieck, dessen Seiten alle die Gleiche Länge haben, wird *gleichseitig* genannt.

  Jeder der drei Winkel ist demnach gleichgroß und somit $\alpha = \beta = \gamma = \frac{180°}{3} = 60°$. Ein Beweis dafür, dass alle Winkel im gleichseitigen Dreieck gleichgroß sind, ergibt sich aus dem Innenwinkelsummensatz und dem Sinussatz. Im Dreieck ABC mit den Seiten $a = b = c$ ergibt sich:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$$

$$\alpha = \beta = \gamma$$

$$3\alpha = 180°$$

$$\alpha = 60°$$

Ein Dreieck mit zwei Winkeln von 60° ist in jedem Fall ein Gleichseitiges. Für den Flächeninhalt unterteilt man das Dreick in zwei Gleichgroße, in dem man ein Lot über Seite c zieht. Sei h die Strecke zwischen Lotpunkt L und C und p die Strecke zwischen A und L. Nun sind zwei rechtwinklige Dreiecke entstanden, deren Flächeninhalt bekannt ist. Für die Gesamtfläche des gleichseitigen Dreiecks berechnet man zweimal den Flächeninhalt eines der Entstandenen (diese sind nämlich kongruent). Für h gilt: $\sin 60° = \frac{h}{a}$ und für p gilt $\cos 60° = \frac{p}{a}$. Somit ist $A = 2 \cdot \frac{1}{2} hp = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Die Höhe des Dreickes ist demnach $\frac{\sqrt{3}}{2} a$. Für den Radius des Innenkreises konstruiere man sich eine Strecke vom Punkt A zum Mittelpunkt M. Diese ist der Kongruenz wegen die Winkelhalbierende von α. Das Dreieck ALM hat einen rechten Winkel bei $\sphericalangle ALM$ und einen 30° Winkel bei $\sphericalangle LAM$ der Kongruenz wegen. Die Strecke LM ist genau der Radius des Innenwinkels und somit über die trigonometrische Beziehung $\tan 30° = \frac{2r_i}{a}$ gegeben. Umgestellt folgt: $r_i = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Der Umkreisradius ist doppelt so groß wie der Innenkreisradius und somit $r_a = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

- Ein Dreieck, das zwei Seiten hat, die gleichlang sind, wird *gleichschenklig* genannt. Seien die Seiten a und b des Dreiecks ABC gleichlang, so sind auch die Winkel α und β gleichgroß. Der Beweis hierfür geht auch aus dem Sinussatz hervor:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{a}{\sin \beta} \\ \sin \alpha &= \sin \beta \end{aligned}$$

$$\alpha = \beta$$

Dreiecke mit besonderen Eigenschaften sind insofern wichtig in der Mathematik, als dass geometrische Probleme durch besondere Beziehungen einfacher gelöst werden können. Ist ein Dreieck in allen drei Seiten beziehungsweise Winkeln unterschiedlich, spricht man von einem unregelmäßigen Dreieck.

5.5 Vektoren

Unter einem Vektor versteht man eine (Parallel-) Verschiebung eines Punktes oder einer Punktmenge in der Ebene bzw. im Raum. Er ist wie ein Pfeil zu deuten und auf nur zwei Eigenschaften reduziert: seine Länge und seine Richtung. Mithilfe eines Vektors kann man die Translation aller Raumpunkte eindeutig erfassen. Für die Notation verwendet man kleine lateinische Buchstaben, welchen ein Pfeil aufgesetzt ist. Alternativ schreibt man, überwiegend im englischsprachigen Raum, den Buchstaben fett:

$$\vec{a} \text{ oder } \mathbf{a}$$

In der Praxis, vor allem der Physik und Informatik, findet man zwei- beziehungsweise dreidimensionale Vektoren. Sie entsprechen den Gegebenheiten unseres Raumes. Die Dimension des Vektors gibt an, wie viele Komponenten er hat und folglich entlang wie vieler Achsen verschoben wird. Ein dreidimensionaler Vektor verschiebt demnach in drei (x, y und z) Achsen. Ein $n-$dimensionaler Vektor besteht folglich aus n reellen Zahlen bzw. Komponenten. Jede dieser Zahlen beschreibt die Verschiebung entlang einer Achse. Diese werden untereinander und von einer großen Klammer begrenzt notiert. Man vergleicht Vektoren deshalb oft mit $n \times 1$ Matrizen. Für einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ des Raumes, der auf der x-Achse um x, auf

der y-Achse um y und auf der z-Achse um z Einheiten mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ verschiebt, schreibt man:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Im Folgenden werden Vektoren mit besonderen Merkmalen erklärt.

Nullvektor:
Der Nullvektor ist ein Vektor, welcher, wie dem Namen zu entnehmen ist, auf allen Achsen um 0 Einheiten (also praktisch gar nicht) verschiebt. Er ist der einzige Vektor, der graphisch nicht als Pfeil dargestellt werden kann. Der Nullvektor $\vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$ ist:

$$\mathbf{0} = \vec{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor:
Der Einheitsvektor ist jener Vektor dessen Länge bzw. euklidische Norm genau Eins beträgt. Es ist jedem Vektor $\vec{a}$, der nicht der Nullvektor ist, möglich, einen Einheitsvektor $\vec{a_e}$ zuzuordnen, sodass seine Richtung erhalten bleibt. Dafür dividiert man $\vec{a}$ durch seine Länge (siehe Kapitel 5.5.2) und *normiert* ihn damit:

$$\vec{a}_e := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

In endlichdimensionalen reellen Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ sind die sogenannten *kanonischen* Einheitsvektoren von großem Nutzen. Diese sind Spezialfälle von Einheitsvektoren, welche nur entlang einer Achse um die Einheit Eins verschieben (in allen anderen um Null). Die kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$

werden Naturwissenschaften und insbesondere der Physik als **i**, **j** und **k** (typischerweise mit fetten Buchstaben) bezeichnet:

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor kann als Folge aus kanonischen Vektoren geschrieben werden.

> Beispielsweise kann der Vektor vom Ursprung $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(3, 1, -2)$ als $(3\mathbf{i}, \mathbf{j}, -2\mathbf{k})$ notiert werden.

Ortsvektor:
Für den Ortsvektor gibt es viele Bezeichnungen. Richtungs-, Stütz-, Positions- oder Radiusvektor: alle stehen für einen Vektor, der vom Koordinatenursprung O bis zu einem Punkt P verläuft. Man notiert den Vektor wie eine Gerade, welche vom Ursprung zum Punkt führt, und kann den entstandenen Vektor mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben benennen. Für $P \in \mathbb{R}^3$ mit den Koordinaten P_x, P_y und P_z gilt:

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

Gegenvektor:
Der Gegenvektor ist ein Vektor $\vec{a}_{\text{geg}}$, der dem Vektor $\vec{a}$ entgegengerichtet ist. Die Länge bleibt dabei unverändert, nur die Richtung ist "andersherum". Betrachtet man den Vektor, der die Verschiebung der Punkte A und B beschreibt ($\overrightarrow{AB}$), so beschreibt der Gegenvektor die Verschiebung von B zu A ($\overrightarrow{BA}$).

Vektoren gleicher Länge und gleicher Richtung unterliegen einer Äquivalenzrelation. Sie können nicht weiter voneinander unterschieden werden.

5.5.1 Lineare Abhängigkeit

Vektoren sind linear abhängig zu einem Vektorraum, wenn sie in ihm liegen. Im Eindimensionalen bedeutet dies, dass jeder Vektor, der parallel zu einem Basisvektor $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ verläuft, linear abhänig von ihm ist. Für einen zweidimensionalen Vekorraum mit den Basisvekoren $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ und $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ heißt das, dass jeder Vektor, der in diesem Raum liegt, linear abhängig von $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ und $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ ist und so weiter. Jeder andere Vektor ist linear unabhänig.

5.5.2 Euklidische Norm eines Vektors

Die Länge, der Betrag bzw. die euklidische Norm jedes Vektors kann mithilfe des mehrfach angewandten Satzes des Pythagoras ermittelt werden. Die Darstellung erfolgt über den Namen des Vektors, welcher von je zwei senkrechten Linien begrenzt ist. Für einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}$$

Für die Herleitung dieser Formel werden konkrete Fälle betrachtet und auf ein Muster geschlossen. Der besseren Lesbarkeit wegen, werden die Achsen nicht mit x, y et cetera bezeichnet. Stattdessen wird jeder Achse ein $n \in \mathbb{N}$ zugewiesen. Für $\vec{a} \in \mathbb{R}^1$, einem Vektor, der in nur eine Richtung verläuft ist klar, dass dessen Länge gleich der Achsenverschiebung dieser einen Achse ist: $\|\vec{a}\| = a_1 = \sqrt{a_1^2}$. Im $\mathbb{R}^2$ verschiebt der Vektor entlang von zwei Achsen um a_1 auf Achse 1 und a_2 auf Achse 2. Für den Betrag ist leicht ersichtlich, dass der Satz des

Pythagoras gilt: $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Kommt im $\mathbb{R}^3$ eine weitere Verschiebung auf Achse 3 um a_3 hinzu, kann der Satz des Pythagoras erneut angewant werden:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Führt man diese Regelmäßigkeit für das $\mathbb{R}^4$ aus, erhält man:

$$\sqrt{\left(\sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2 + a_3^2}\right)^2 + a_4^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 + a_4^2}$$
$$= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}$$

Hierbei es ist wichtig zu erkennen, dass die Vektornormen (und die gesamte analytische Geometrie), die die dritte Dimension übersteigen, nur ein theoretisches Konstrukt sind. Die vierte (Raum)Dimension existiert nicht. Deshalb ist eine Herleitung der Formel nur bis ins $\mathbb{R}^3$ sinnvoll. Für die Dimensionen darüber hinaus wurde die Norm des Vektors über diese Formel vielmehr *definiert* als *hergeleitet*.

5.5.3 Inhalt eines n-Parallelotops

Das n-Parallelotop ist das Parallelotop, das von n Vektoren aufgespannt wird. Für $n = 2$ spricht man von einem Parallelogramm, für $n = 3$ von einem Parallelepiped oder Spat. Definitionsgemäß entspricht der Inhalt A des n-Parallelotops (siehe 6.1.5):

$$A := \sqrt{|\det(a_i \circ a_j)|}$$

Auch hier gilt das Prinzip, dass der Inhalt eines n-Parallotops höherer Dimensionen über die o.g. Formel *definiert* wurde, weil sie sich für die uns überprüfbaren Dimensionen als wahr herausgestellt hat. Ob der Flächeninhalt in einem Universum mit vier Dimensionen *wirklich* so groß ist, ist unklar.

5.5.4 Verknüpfen von Vektoren

Vektoren werden in den Grundrechenarten ähnlich wie $n \times 1$ Matrizen behandelt.

Addition und Subtraktion:
Addiert man Vektoren miteinander, entspricht dies der Verschiebung jedes einzelnen Vektors nacheinander. Angenommen der Vektor $\vec{a}$ stellt eine Verschiebung vom Punkt P zum Punkt Q dar und $\vec{b}$ von Punkt Q nach Punkt R, so entspricht die Addition dieser Vektoren der Verschiebung von P nach R. Man stelle sich geometrisch einen Pfeil vor, an dessen Pfeilspitze der andere Pfeil angelegt wird (Abb. 5.8a). Alternativ hierzu, kann man sich überlegen, dass man beide Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an P anlegt und die Figur durch Parallelverschiebung zu einem Parallelogramm (mit Endpunkt R) ergänzt. Die Diagonale, also die Strecke $\overrightarrow{PR}$ stellt die Summe (bzw. einen neuen Vektor) beider Vektoren dar (Abb. 5.8b).



(a) Pfeilaneinanderreihung (b) Parallelogramm

Abb. 5.8: Vektoraddition $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ im $\mathbb{R}^2$

Für die Addition beziehungsweise Subtraktion der Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $x_a, y_a, z_a \in \mathbb{R}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $x_b, y_b, z_b \in \mathbb{R}$ gilt also:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a + x_b \\ y_a + y_b \\ z_a + z_b \end{pmatrix} = \vec{c}$$

Skalierung
Vektoren können mittels einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$ (in diesem Zusammenhang auch Skalar genannt) skaliert werden. Praktisch bedeutet dies, die Länge des Vektors zu ändern. Skalieren verändert die Richtung nicht. Lediglich im Falle eines negativen Skalars ändert sich die Richtung in die Entgegengesetzte. Für die Skalierung des Vektors $\vec{a} = (x\mathbf{i}, y\mathbf{j}, z\mathbf{k}), \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit c, multipliziert man jede einzelne Komponente des Vektors mit dem Skalar:

$$c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \\ c \cdot z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt
Das Skalarprodukt zweier Vektoren weist diesen ein Skalar (also eine reelle Zahl) zu. Das Operatorsymbol ist das klassische Zeichen der Multiplikation $\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder ein kleiner Kreis $\vec{a} \circ \vec{b}$. Es gibt verschiedene Definitionen des Skalarprodukts. Am besten kann man sich mit der geometrischen Definition vorstellen, was das Skalarprodukt ist: Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Normalprojektion von B auf A: $\vec{a} \circ \vec{b} := \overline{OA} \cdot \overline{OB'}$ (siehe Abb. 5.9). Die Länge der entstandenen Strecke $\overline{OB'}$ multipliziert mit der Strecke $\overline{OA}$ ist das Skalarprodukt der Vektoren.
Für das Skalarprodukt gilt das Kommutativgesetz: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Das kann man daran erkennen, dass die Dreiecke $\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$ ähnlich sind. Dazu erweitert man gedanklich Abb. 5.9 für die Normalprojektion von A auf B. Demzufolge gilt die Ähnlichkeitsrelation $\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$. Dies impliziert, dass $\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = \overline{OB} \cdot \overline{OA'}$ und dass $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$. Des Weiteren gelten

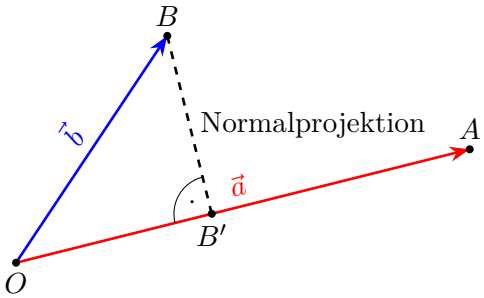


Abb. 5.9: Skalarprodukt als Normalprojektion von B auf A

das Assoziativgesetz:

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

und das Distributivgesetz:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$$

Der Beweis dafür kann auch geometrisch geführt werden, worauf hier verzichtet wird. Es folgen zwei weitere Definitionen:

$$\vec{a} \circ \vec{b} := \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_a = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$$

Das Skalarprodukt ist also weiterhin in Verbindung mit dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Winkel sowie aufgespannten Inhalt des Parallelotops gebracht. Dass beide Definitionen in reellen Vektorräumen dieselben sind, soll beweisen werden. Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren eines reellen Vektorraumes und φ der zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel. $\vec{c}$ sei $\vec{b} - \vec{a}$. Es gilt der Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\varphi \\
\cos\varphi &= \frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{c}\|^2}{2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2 - \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}\right)^2}{2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + 2a_i b_i + b_i^2)}{2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + b_i^2 - a_i^2 - b_i^2 + 2a_i b_i\right)}{2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}
\end{aligned}
$$

Aus der Definition folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \vec{a} \circ \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich Null, stehen diese orthogonal zueinander:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Dass dem so ist, ist Folge der geometrischen Definition. Stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander ist die Strecke $\overline{OB'}$ Null und somit ebenfalls das Skalarprodukt. Im Zwei- bzw. Dreidimensionalen gibt es einen weiteren Beweis über den Satz des Pythagoras: Man nehme sich zwei Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ und

$\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Angenommen, die Vektoren stehen orthogonal zueinander: Spannt man ein Dreieck mit den Punkten A, B und C, wobei C die Intersektion von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, A das Ende von $\vec{a}$ und B das Ende von $\vec{b}$ ist, so ist $\sphericalangle BCA$ ein rechter Winkel. Laut Satz des Pythagoras gilt nun: $a^2 + b^2 = c^2$ also $\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{c}\|^2$. Vektor $\vec{c}$ ist nun nichts anderes als die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Somit gilt:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

und damit:

$$\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2}\right)^2$$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

$$= a_x^2 + b_x^2 + 2a_xb_x + a_y^2 + b_y^2 + 2a_yb_y + a_z^2 + b_z^2 + 2a_zb_z$$

$$\therefore 0 = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad \square$$

Andernfalls ist es möglich über die andere Definition zu erkennen, dass für $\varphi = 90° : \cos(\varphi) = 0$ und damit $a \circ b$ Null ist.

Eingeschlossener Winkel:
Der Winkel φ, der zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen wird, kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Für die Herleitung dieser Formel genügt die Definition des Skalarprodukts.

Kreuzprodukt:
Das Kreuzprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ weist ihnen einen Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ zu, der die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

1. $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und orthogonal zu $\vec{b}$ und damit orthogonal zur von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

2. Die euklidische Norm von $\vec{c}$ entspricht dem Inhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Anders ausgedrückt gilt die Beziehung $\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \varphi$ wobei φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist.

3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Das bedeutet, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gleich orientiert sind wie die Vektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ der Orthonormalbasis. Im physikalischen Raum bedeutet das, dass sie sich wie Daumen ($\vec{a}$), Zeigefinger ($\vec{b}$) und abgespreizter Mittelfinger ($\vec{c}$) der rechten Hand verhalten (Rechte-Hand-Regel).

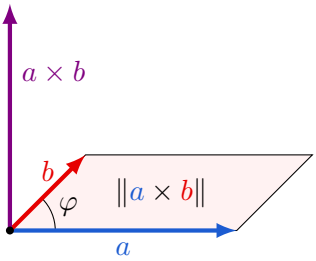


Abb. 5.10: Eigenschaften des Vektorprodukts

Durch diese Definition sollte bereits aufgefallen sein, dass die Kreuzmultiplikation nur mit Vektoren des $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Der Kreuzmultplikationsoperator ist ein Kreuz: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$. Das Distributivgesetz und das Antikommutativgesetz gelten beim

Rechnen mit Kreuzprodukten.

Wie das Kreuzprodukt konkret bestimmt werden kann, soll im Folgenden hergeleitet werden. Zuerst überlegt man sich aus der allgemeinen Definition die Kreuzprodukte der kanonischen Einheitsvektoren. Wenn $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist, erfüllen die Basisvektoren die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \end{aligned}$$

die durch die Antikommutativität des Kreuzprodukts implizieren, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Die Antikommutativität des Kreuzprodukts (und das offensichtliche Fehlen einer linearen Unabhängigkeit) bedeutet auch, dass

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Diese Gleichheiten sowie die Distributivität und Linearität des Kreuzprodukts reichen aus, um das Kreuzprodukt zweier beliebiger Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu bestimmen. Jeder Vektor kann als Summe dreier orthogonaler Komponenten definiert werden, die parallel zu den Standardbasisvektoren verlaufen:

$$\vec{a} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}), \quad \vec{b} = (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

Es folgt aufgrund der Distributivität:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + \\
&\quad a_2b_1(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) + a_3b_2(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + \\
&\quad a_3b_1(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k}\times\mathbf{k})
\end{aligned}
$$

Dies kann als Zerlegung von $\vec{a}\times\vec{b}$ in die Summe von neun einfacheren Kreuzprodukten mit Vektoren, die mit $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ oder $\mathbf{k}$ ausgerichtet sind, interpretiert werden. Jedes dieser neun Kreuzprodukte wirkt auf zwei Vektoren, die einfach zu handhaben sind, da sie entweder parallel oder orthogonal zueinander sind. Aus dieser Zerlegung ergibt sich unter Verwendung der oben erwähnten Gleichungen und der Zusammenfassung ähnlicher Terme:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= a_1b_1\cdot\mathbf{0} + a_1b_2\cdot\mathbf{k} - a_1b_3\cdot\mathbf{j} - \\
&\quad a_2b_1\cdot\mathbf{k} + a_2b_2\cdot\mathbf{0} + a_2b_3\mathbf{i} + \\
&\quad a_3b_1\cdot\mathbf{j} - a_3b_2\cdot\mathbf{i} + a_3b_3\cdot\mathbf{0} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\cdot\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\cdot\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\cdot\mathbf{k} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Eine weitere interessante Definition des Kreuzprodukts ist, dass es die Determinante einer Matrix aus den kanonischen Basisvektoren $\mathbf{i},\mathbf{j}$ und $\mathbf{k}$ sowie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist:

$$
\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & a_1 & b_1 \\ \mathbf{j} & a_2 & b_2 \\ \mathbf{k} & a_3 & b_3 \end{bmatrix}
$$

5.6 Geraden

Geraden sind unendlich ausgedehnte eindimensionale Objekte. Die Lage einer Gerade ist durch zwei Punkte eindeutig

bestimmt. Dabei dient einer der beiden Punkte als Stütze, auf der die Gerade sozusagen aufliegt. Der Ortsvektor dieses Punktes wird deshalb auch als Stützvektor bezeichnet. Der andere Punkt gibt die Richtung, in die die Gerade verläuft, vor. Der Vektor zwischen diesen Punkten wird als Richtungsvektor bezeichnet.

Die Gerade g durch die Punkte P und Q ist gegeben durch die Menge aller Punkte, die ein Vielfaches des Richtungsvektors am Ortsvektor sind:

$$g = \left\{ \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PQ} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Als Spurpunkte einer Gerade bezeichnet man jene Punkte, die die Gerade und eine Ebene schneiden, die durch zwei der drei kanonischen Vektoren $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ aufgespannt ist.

Lagebeziehungen:
Gegeben seien zwei Geraden g und h mit $g = \{\vec{a} + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \left\{\vec{b} + \mu\vec{u} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$

g und h sind parallel, wenn die beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{u}$ kollinear sind. Das heißt $\exists r \in \mathbb{R} : \vec{v} = r \cdot \vec{u}$.

g und h sind *echt* parallel, wenn sie parallel sind und keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Das heißt, dass das Gleichungssystem $g = h$ keine Lösung hat.

g und h sind identisch, wenn sie unendlich viele Schnittpunkte haben. Das heißt, dass das Gleichungssystem $g = h$ unendlich viele Lösungen besitzt. g und h sind auch identisch, wenn sie parallel sind und sie mindestens einen Punkt (beispielsweise den Stützvektor) gemeinsam haben.

g und h sind windschief, wenn sie nicht parallel sind und keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

g und h verlaufen schneidend, wenn sie genau einen Schnittpunkt haben. Das heißt, es existiert genau eine Lösung für das Gleichtungssystem $g = h$.

Das Gleichungssystem $g = h$ ist ein lineares Gleichungssystem der Geraden $g, h \subset \mathbb{R}^n$, bestehend aus n Gleichungen. Die Gleichungen entsprechen den n Komponenten des entstehenden variablen Punktes in Abhängigkeit von λ bzw. μ. Der Winkel zwischen zwei Geraden kann über den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{u}$ bestimmt werden.

5.7 Ebenen

Bei einer Ebene handelt es sich um ein unbegrenzt ausgedehntes, flaches, zweidimensionales Objekt. Unbegrenzt ausgedehnt und flach heißt bildlich gesprochen, dass zu zwei Punkten der Ebene auch eine die Punkte durchlaufende Gerade vollstänig in ihr liegt. Eine Ebene im euklidischen Raum ist nach Hilbert eindeutig festgelegt durch

1. drei nicht kollineare Punkte,
2. eine Gerade und einen Punkt, der diese Gerade nicht inzidiert,
3. zwei sich schneidenen Geraden oder
4. zwei Geraden, die echt parallel zueinander verlaufen.

Ebenen werden durch Ebenengleichungen beschrieben. Es gibt sechs verschiedene Formen von Ebenengleichungen. Wenn die

einzelnen Koordinaten der Ebenenpunkte in einer Gleichungsbeziehung stehen, wird dies als Koordinatengleichung bezeichnet. Zu Koordinatengleichungen gehören die Koordinatenform und die Achsenabschnittsform. Wenn die Ortsvektoren der Ebenenpunkte in der Gleichung stehen, liegt eine Vektorgleichung vor, die die Parameterform und die Dreipunkteform einschließt. Eine Gleichung, die einen Normalenvektor der Ebene enthält, wird als Normalengleichung bezeichnet. Zu den Normalengleichungen gehören die Normalenform und die Hessesche Normalform.

In der analytischen Geometrie wird jeder Punkt im dreidimensionalen Raum durch ein Koordinatentupel (im $\mathbb{R}^3$ auch Koordinatentripel (x, y, z)) in einem kartesischen Koordinatensystem identifiziert. Eine Gleichung, die die Unbekannten x, y und z enthält, beschreibt eine Menge von Punkten im Raum, nämlich diejenigen, deren Koordinaten die Gleichung erfüllen. Ebenen werden dadurch charakterisiert, dass ihre Gleichungen linear sind. Eine Ebene E, die aus denjenigen Punkten besteht, deren Koordinaten (x, y, z) die Gleichung $ax + by + cz = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erfüllen, lautet in Mengenschreibweise:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\right\}$$

Die entsprechende Darstellung in der Koordinatenform lautet:

$$E : ax + by + cz = d$$

Mindestens eine der Zahlen a, b, c muss dabei ungleich Null sein. Die Koeffizienten a, b, c sind die Komponenten des Normalenvektors von E. Der Normalenvektor einer Ebene ist der Vektor, der senkrecht auf ihr steht. Er ist gleichzeitig das Kreuzprodukt beider Spannvektoren. Für die Darstellung über

eine Vektorgleichung sind die Punkte A, B und C gegeben und E bestimmt durch die Menge der Punkte, die folgende Bedingung erfüllen:

$$E = \left\{ \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

wobei $\vec{p} = \overrightarrow{OA}$ der Stützvektor und $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ die Richtungs- bzw. Spannvektoren sind. Eine Darstellung in Parameterform besteht aus denjenigen Ortsvektoren $\vec{x}$, die die Gleichung

$$E : \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{u}$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ erfüllen. Die Punkte einer Ebene werden bei den Normalenformen einer Ebenengleichung durch eine skalare Gleichung mit einem Normalenvektor der Ebene charakterisiert. Dadurch erhält man eine implizite Darstellung einer Ebene. In der Normalenform wird eine Ebene durch einen Stützvektor $\vec{p}$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$ beschrieben:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \circ \vec{n} = 0$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren (die ungleich dem Nullvektor sind) ist dann gleich Null, wenn die beiden Vektoren orthogonal zueinander stehen. In der Normalenform besteht eine Ebene aus den Punkten im Raum, für die der Differenzvektor aus dem Ortsvektor und dem Stützvektor orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist. Bei der HESSEschen Normalenform wird eine Ebene durch den Abstand d zum Koordinatenursprung und einen normierten Normalenvektor $\vec{n}_0$ beschrieben. Die Ortsvektoren $\vec{x}$ von E erfüllen die Gleichung

$$E : \vec{x} \circ \vec{n}_0 = d.$$

Eine Ebene ist eine echte Teilmenge des Raumes und teilt ihn immer in zwei Bereiche. Als Spurpunkte einer Ebene bezeichnet man jene Punkte, die die Ebene mit einer der Koodinatenachsen (einer Gerade der Orthonormalbasen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ im $\mathbb{R}^3$)

schneiden. Der Normalenvektor einer Ebene ist ein Vektor, der orthogonal zu ihr steht und ergibt sich aus dem Kreuzprodukt beider Richtungsvektoren.

Lagebeziehungen:
Gegeben seien zwei Ebenen E und F

E und F sind parallel, wenn ihre Normalenvektoren parallel sind.

E und F sind *echt* parallel, wenn das Gleichungssystem $E = F$ keine Lösung hat.

E und F sind identisch, wenn sie parallel sind und das Gleichungssystem $E = F$ unendlich viele Lösungen hat.

E und F schneiden sich, wenn sie nicht parallel sind und das Gleichungssystem $E = F$ unendlich viele Lösungen hat. Ebenen scheiden sich stets in einer Schnittgerade und niemals nur in einem Punkt. Abb. 5.13 zeigt die Lagebeziehung von Ebenen. Dabei gilt für den Richtungsvektor der Schnittgerade, dass dieser orthogonal zu beiden Normalenvektoren von E und F verläuft; er also das Kreuzprodukt dieser ist. Zur Bestimmung einer Schnittgerade genügt es neben dem Richtungsvektor nur noch einen Punkt zu finden, der auf beiden Ebenen enthalten ist und als Stütze dient.

Der Winkel zwischen zwei Ebenen kann über den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren bestimmt werden.

5.8 Lagebeziehungen zwischen Objekten des Raumes

Zur Überprüfung, ob sich ein Punkt P auf einer Gerade g bzw. in einer Ebene E befindet, nutzt man die sog. Punktprobe. Es wird dabei überprüft, ob das Gleichungssystem $\overrightarrow{OP} = g$ bzw. $\overrightarrow{OP} = E$ genau eine Lösung hat.

Für die Lage zwischen Ebenen und Geraden gibt es drei Fälle. (1) Die Gerade und die Ebene verlaufen *echt* parallel. Dies ist der Fall, wenn der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und der Richtungsvektor $\vec{v}$ der Gerade in einem 90° Winkel zueinander stehen ($\vec{n} \circ \vec{v} = 0$) und das Gleichungssystem $g = E$ keine Lösung besitzt. (2) Die Gerade inzidiert die Ebene. Das ist der Fall, wenn $\vec{n}$ und $\vec{v}$ orthogonal stehen und das Gleichungssystem $g = E$ unendlich viele Lösungen hat. (3) Der letzte Fall ist, dass g und E genau einen Schnittpunkt haben. In diesem Fall hat das Gleichungssystem $g = E$ genau eine Lösung. Es ist nicht möglich, dass eine Gerade und eine Ebene windschief sind, weil sich eine Ebene im ganzen Raum ausbreitet und die Gerade deshalb, wenn sie nicht parallel zu ihr verläuft, immer einen Schnittpunkt mit ihr hat. Mathematisch kann man argumentieren, dass ein lineares Gleichungssystem mit drei nicht äquivalenten Gleichungen und drei Unbekannten (wie es in diesem Fall wäre) immer mindestens eine Lösung hat (siehe Kapitel 6.3). Wären mindestens zwei Gleichungen äquivalent, würden g und E parallel verlaufen.

Wie findet man die Schnittgerade zwischen zwei Ebenen?
Gegeben seien zwei Ebenen $E_1 : -4x + 3y + 2z = 5$ und $E_2 = 2x + y - z = 0$. Die Schnittgerade g verläuft parallel zu beiden Ebenen. Das heißt für den Richtungsvektor $\vec{r}$ von

g gilt:

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wobei $\vec{n}_i$ der Normalenvektor von E_i ist. Es muss nur noch ein Stützvektor gefunden werden, der in beiden Ebenen ist. Anhand der Ebenengleichungen kann man erkennen, dass keine der Ebenen parallel zur $y - z$ (aber auch zur $x - y$ und $x - z$) Ebene ist. Das heißt, dass es einen gemeinsamen Schnittpunkt in der $y - z$ Ebene geben muss. Sei also $x = 0$:

$$\begin{aligned} 3y + 2z &= 5 \\ y - z &= 0 \\ y &= z \\ \implies 3y + 2y &= 5 \\ y &= 1 \\ \implies 3z + 2z &= 5 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Das heißt, dass ein gemeinsamer Schnittpunkt bei $(0, 1, 1)$ liegt und somit ist die Schnittgerade eindeutig definiert durch die Menge: $g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Verallgemeinert man diese Überlegung, ergibt sich für eine Schnittgerade der Form $g = \{\vec{a} + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ zwischen den Ebenen $E_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ und $E_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

die Lösung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_1 d_2 - c_2 d_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \\ \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ a_2 c_1 - a_1 c_2 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

5.9 Abstände zwischen Objekten des Raumes

Punkt - Punkt:
Der Abstand zwischen zwei Punkten lässt sich über den mehrfach angewandten Satz des Pythagoras - also über die euklidische Norm des Verbindungsvektors beider Punkte.

Punkt - Gerade:
Gegeben sei eine Gerade g mit einem Stützpunkt S und einem Richtungsvektor $\vec{v}$ sowie der Punkt P:

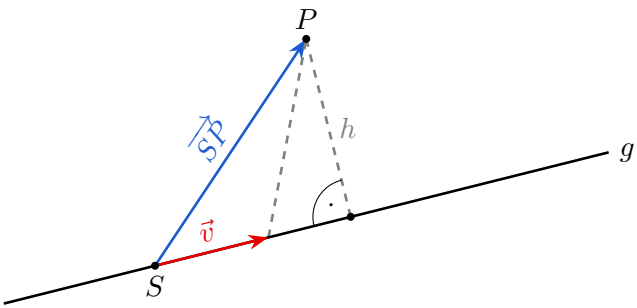


Abb. 5.11: Abstand zwischen Punkt und Gerade

Der Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Vekoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{SP}$ und den Punkt P begrenzt ist, kann über zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Einerseits gilt im allge-

meinen Dreieck, dass der Flächeninhalt aus dem halben Produkt aus Grundseite $\|\vec{v}\|$ und seiner Höhe h berechnet wird: $A = \frac{1}{2}\|\vec{v}\| h$. Andererseits kann der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{v}$ und $\overrightarrow{SP}$ aufgespannten Parallelogramms definitionsgemäß aus dem Betrag des Kreuzproduktes beider Vektoren ermittelt werden. Das Dreieck hat dessen halben Flächinhalt. Es gilt demzufolge:

$$A = \frac{1}{2}\|\vec{v}\| h = \frac{1}{2}\left\|\vec{v} \times \overrightarrow{SP}\right\|$$
$$\implies h = \frac{\left\|\vec{v} \times \overrightarrow{SP}\right\|}{\|\vec{v}\|}$$

Punkt - Ebene:
Für den Abstand von einem Punkt $P(x_1 \mid x_2 \mid x_3)$ zu einer Ebene $E : ax + by + cz + d = 0$ gilt, dass die geringste Distanz zwischen ihnen auf einer Gerade liegt, die P beinhaltet und senkrecht auf E ist. Dass dem so ist, kann man sich wie folgt überlegen: Angenommen man sendet von P eine Welle aus, die sich in alle Richtungen gleichschnell ausbreitet. Die Expansion verläuft kugelförmig. Sobald die Kugel die Ebene tangiert wird die Zeit angehalten. Die Distanz vom (Kugelmittel)Punkt zur Ebene ist jetzt minimal. Die Tangente an einer Kugel steht (wie beim Kreis) stets orthogonal zum Radius, der die kürzeste Entfernung zum Mittelpunkt darstellt. Für diesen Fall heißt das, dass die Gerade g den Normalenvektor $\vec{n}$ von E als Richtungsvektor haben muss: $g = \left\{\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{n} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Normiert man $\vec{n}$, sodass seine Norm Eins beträgt, stellt sich nur noch die Frage, nach wie vielen λ E geschnitten wird. $|\lambda|$ ist dann ein Maß für die Distanz zwischen E und P:

$$g = E$$

$$\begin{aligned}\implies 0 &= a\left(x_1 + \lambda\frac{a}{\|\vec{n}\|}\right) + b\left(x_2 + \lambda\frac{b}{\|\vec{n}\|}\right) \\ &\quad + c\left(x_3 + \lambda\frac{c}{\|\vec{n}\|}\right) + d \\ &= ax_1 + \lambda\frac{a^2}{\|\vec{n}\|} + ax_2 + \lambda\frac{b^2}{\|\vec{n}\|} + ax_3 + \lambda\frac{c^2}{\|\vec{n}\|} + d\end{aligned}$$

$$\lambda\left(\frac{a^2}{\|\vec{n}\|} + \frac{b^2}{\|\vec{n}\|} + \frac{c^2}{\|n\|}\right) = -ax_a - bx_2 - cx_3 - d$$

$$\begin{aligned}|\lambda| &= \frac{\|\vec{n}\|\,(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d)}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist derselbe wie:

$$d = \frac{(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \circ \vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \overrightarrow{PQ} \circ \vec{n}_0$$

wobei Q ein beliebiger Punkt auf E und $\vec{n}_0$ der normierte Normalenvektor von E ist.

Gerade - Gerade:
Gegeben seien zwei Geraden $g = \left\{\overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ und $h = \left\{\overrightarrow{OQ} + \mu \cdot \vec{u} \mid \mu \in \mathbb{R}\right\}$. Für Abstände zwischen g und h gibt es zwei Szenarien. Erstens, die Geraden verlaufen parallel. In diesem Fall genügt es, den Abstand zwischen einem beliebigen Punkt P von g (beispielsweise dem Stützvektor) und h (oder umgekehrt) zu berechnen, da die Distanz zwischen jeden P auf g und h aufgrund der Parallelität immer gleich ist.

Zweitens, die Geraden verlaufen windschief. Die Gerade, die zwischen den beiden nähesten Punkten von g und h verläuft, steht senkrecht zu beiden. Für die Berechnung des Abstandes stellt man sich eine Hilfsebene E_H auf. Diese verläuft so, dass eine Gerade E_H inzidiert und sie orthogonal zu beiden ist. Der Normalenvektor ist also $\vec{v} \times \vec{u}$. Jeder beliebige Punkt auf der anderen Geraden hat den gleichen kürzesten Abstand zu E_H, weshalb der Stützvektor verwendet werden kann. In diesem Fall gilt für den Abstand d dieselbe Formel wie für den Abstand zwischen Punkt und Ebene:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \circ (\vec{v} \times \vec{u})\right|}{\|\vec{v} \times \vec{u}\|}$$

Gerade - Ebene:
Da Geraden und Ebenen nicht windschief verlaufen können, muss nur der Fall eines parallelen Verlaufes betrachtet werden. Hier ist es wieder möglich, sich einen beliebigen Punkt auf der Geraden zu nehmen und dessen minimalen Abstand zur Ebene zu bestimmen.

Ebene - Ebene:
Auch zwei Ebenen können nicht windschief verlaufen. Entweder schneiden sie sich und der minimale Abstand ist Null oder sie verlaufen parallel. Auch hier ist es möglich, die minimale Distanz zu berechnen, in dem man die minimale Distanz zwischen einem beliebigen Punkt auf der einen Ebene und der anderen Ebene bestimmt.

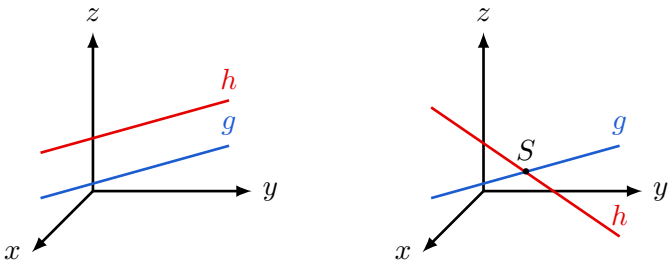


Abb. 5.12: Lagebeziehung von Geraden

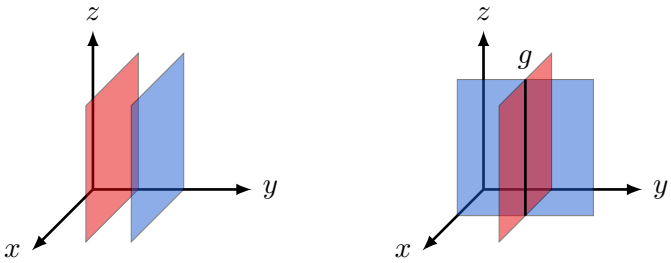


Abb. 5.13: Lagebeziehung von Ebenen

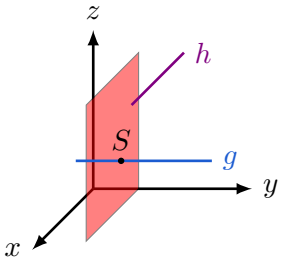


Abb. 5.14: Windschiefe Geraden u. Lagebez. Gerade - Ebene

Kapitel 6

Lineare Algebra - Matrizen

In Kapitel 5 ist der Begriff Matrix schon häufiger gefallen. Die lineare Algebra, die über die analytische Geometrie hinausgeht, ist jedoch so vielfältig, so weitläufig, dass es kaum möglich ist, hier einen sinnvollen Einstieg in diesen Bereich der Mathematik zu geben. Aus diesem Grund behandelt das nun folgende Kapitel lediglich einen Ausblick in die Grundlagen.

6.1 Matrizen

Matrizen sind allgemein gesprochen rechteckige Anordnungen von Elementen. Eine informatische Interpretation ist, dass eine Matrix ein 2D-Array ist:

$$A = A_{(m;n)} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Diese Matrix besteht aus 2 Zeilen und 3 Spalten und wird

deshalb als 2×3 Matrix bezeichnet.

Eine $n \times m$ Matrix besteht aus n Zeilen und m Spalten. Quadratische Matrizen haben die gleiche Anzahl an Spalten und Zeilen und werden als $n \times n$ Matrizen bezeichnet. Bei großen Matrizen ist es üblich, die Zahlen in Indexschreibweise zu notieren, weil Buchstaben unübersichtlich werden. Dabei wird jedem Element a_{ij} die Indizes i (für die Zeile) und j (für die Spalte) zugeordnet:

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Hauptdiagonale einer Matrix besteht aus jenen Elementen, welche auf einer Diagonale von links oben nach rechts unten verläuft. Dies sind diejenigen Elemente, die die Indizes b_{ij} mit $i = j$ und $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$ kennzeichnen. Sie sind im Folgenden dunkel hervorgehoben:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & 7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1.1 Formale Definition

Eine formale Definition einer Matrix ist kompliziert (und eigentlich rein theoretischer Natur). Es ist vorab wichtig zu verstehen, was eine "Familie" im mathematischen Kontext ist. Dieser Begriff wird aus dem Begriff der Funktion abgeleitet. Es handelt sich dabei um eine Sammlung von Objekten, die mit einem Index einer Indexmenge versehen sind. Ein Index ist

ein Unterscheidungszeichen, für das im Allgemeinen ein Element der natürlichen Zahlen verwendet wird; die Indexmenge wäre in diesem Fall die Menge der natürlichen Zahlen. In der Regel wird der Index rechts unten an ein Zeichen, welches für ein mathematisches Objekt steht, angehängt. Es ist aber auch denkbar, beispielsweise bei der EINSTEINschen Summenkonvention, andere Indexpositionen zu verwenden. Eine Funktion $f : I \to A$ von einer Indexmenge I in eine Menge A wird Familie genannt, wenn das Element $a(i)$ als a_i notiet wird. Der wesentliche Unterschied zur Funktion liegt dabei in der Schreibweise und der suggerierten Bedeutung. Des Weiteren kann bei einer Familie dasselbe Element an verschiedenen Positionen vorkommen, sodass $a_i = a_j$ mit $i \neq j$ existieren kann.

Eine Matrix A ist eine doppelt indizierte Familie, also eine Funktion A, die jedem Indexpaar (i, j) das Element a_{ij} als Funktionswert zuordnet wobei $m, n \in \mathbb{N}$ der Anzahl an Zeilen bzw. Spalten entsprechen.

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K, \quad (i, j) \mapsto a_{ij}$$

Der Funktionswert a_{ij} ist das Element der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Die entstandene Menge K wird in mathematischer Kurznotation $K^{m \times n}$ geschrieben und umfasst in vielen Anwendungen den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}^{m \times n}$.

6.1.2 Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix $I_n \in R^{n \times n}$ ist eine quadratische Matrix. Jedes Element auf ihrer Hauptdiagonale hat den Wert 1 bzw. stellt ein neutrales Element dar und jedes andere Element hat

den Wert 0 bzw. stellt ein absorbierendes Element dar:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Notation mit einem I leitet sich vom Wort Identität ab; gelegentlich verwendet man den Buchstaben E, welcher für "Einheit" steht. Der Index n gibt die Dimension $n \times n$ der Einheitsmatrix an.

6.1.3 Operationen mit sich selbst

Die hohe Komplexität des Sammelobjektes Matrix gegenüber dem Skalar erlaubt einige sinnvolle Operationen mit sich selbst. Jede Matrix lässt sich beispielsweise transponieren. Das bedeutet, das die Rolle der Zeilen und Spalten vertauscht wird. Die erste Zeile der Ausgangsmatrix wird zur ersten Spalte der Ergebnismatrix und die erste Spalte der Ausgangsmatrix zur ersten Zeile der Ergebnismatrix. Es entsteht sozusagen eine Spiegelung entlang der Hauptdiagonale. Sei

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m \times n}$$

eine Matrix so ist ihre transponierte Matrix definiert als

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{ji}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{n \times m}$$

Die Anzahl der Zeilen und Spalten wird vertauscht. Eine transponierte Matrix wird mit einem hochgestellten und nichtkursiven T notiert: A^{T}. Dabei gilt stets die Beziehung $A^{\mathrm{T}^{\mathrm{T}}} = A$,

denn eine doppelte Transponierung führt zur Erzeugung der Ausgangsmatrix.

Eine weitere bedeutende Operation ist die Invertierung. Eine invertierte (oder inverse) Matrix A^{-1} hat die Eigenschaft, dass die Ausgangsmatrix A multipliziert mit ihrer inversen A^{-1} die entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix ergibt. Eine Invertierung ist deshalb nur bei quadratischen Matrizen möglich:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Eine geometrische Interpretation der inversen Matrix A^{-1} ist, dass sie eine Transformation durch A rückgängig macht.

6.1.4 Matrizenaddition und -multiplikation

Seien A und B $n \times m$ Matrizen, also Matrizen vom selben Typ bzw. der gleichen Dimension, ist die Addition dieser komponentenweise definiert:

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Addition ist kommutativ, assoziativ und mit der Matrizenmultiplikation distributiv. Die skalare Multiplikation der Matrix A mit einem Skalar α ist ebenfalls komponentenweise definiert:

$$\alpha \cdot A := (\alpha \cdot a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die skalare Multiplikation darf nicht mit dem Skalarprodukt verwechselt werden.

Die Multiplikation zweier Matrizen ist nur für die Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{jk})$ definiert, wenn die Spaltenzahl von A (der linken Matrix) mit der Zeilenzahl von B (der rechten Matrix) übereinstimmt. Sie ist eine binäre Verknüpfung

$$\cdot : R^{l\times m} \times R^{m\times n} \to R^{l\times n}, \quad (A, B) \mapsto C = A \cdot B,$$

die A und B eine Matrix $C = (c_{ik})$ zuordnet. Die Zeilenzahl l von C entspricht derjenigen von A und Spaltenzahl n von C derjenigen von B. Jede Komponente von C ist als komponentenweise Multiplikation der Komponenten der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B und durch Summierung all dieser Produkte definert:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Zur Verdeutlichung dieses Prinzips betrachten wir ein Anwendungsbeispiel der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Hier stimmt die Spaltenzahl von A mit der Zeilenzahl von B überein, weshalb eine Multiplikation zulässig ist. Es ist direkt erkennbar, dass die Ergebnismatrix $C = (c_{ik})$ die Dimension 2×2 hat. Die Rechnenschritte für das Feld c_{11} sind entsprechend farblich hervorgehoben:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 1\cdot 4 & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Es folgen die restlichen Rechenschritte:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Bei der Definition für die Matrizenmultiplikation wurde explizit erwähnt, dass die Reihenfolge der Faktoren relevant ist. Das Kommutativgesetz gilt hier nämlich nicht. Es macht einen Unterschied, ob Matrix A mit Matrix B oder B mit A multipliziert wird. Der Beweis erfolgt ganz einfach durch ein Gegenbeispiel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es werden nun die Matrizen $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}, B = (b_{jk}) \in R^{n \times p}$ und $C = (c_{kl}) \in R^{p \times q}$ betrachtet. Für deren Matrizenmultiplikation gilt das Assoziativgesetz:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Es spielt also keine Rolle in welcher Reihnfolge Teilprodukte gebildet werden, solange die Gesamtreihung unverändert bleibt. Die assoziative Eigenschaft ist direkte Folgerung der

Assoziativität der Addition und Multiplikation; für die Komponente c_{il} der resultierenden Matrix gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kl} \right) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{kl} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right) \cdot c_{kl}\end{aligned}$$

Das Assoziativgesetz gilt auch für Skalare:

$$\alpha\,(B \cdot C) = (\alpha\, B) \cdot C = B \cdot (\alpha\, C)$$

Richten wir unsere Aufmerksamkeit nun auf andere Matrizen mit den Eigenschaften $A, B \in R^{l \times m}$ und $C \in R^{m \times n}$. Für diese gilt das Distributivgesetz

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C,$$

welches ebenfalls Folge aus der Distributivität der Addition und Multiplikation ist:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) \cdot c_{jk} &= \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} \cdot c_{jk} + b_{ij} \cdot c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot c_{jk} + \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot c_{jk}\end{aligned}$$

6.1.5 Determinante

Die Determinante ist ein Skalar, das einer quadratischen Matrix zugeordnet werden kann. Es gibt mehrere Methoden zur

Ermittlung dieser. Wir widmen uns im Folgenden einem rekursiven Verfahren. Das heißt, dass wir die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ als Summe von Produkten aus Determinanten kleinerdimensionierter Matrizen defineren. Mit jedem Rekursionsdurchlauf verringert sich die Dimension der zu ermittelnden Determinante um eins. Diese kleinerdimensionierten $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen können wiederum auch rekursiv bestimmt werden. Diese "Schleife" läuft solange bis die Dimension der Matrizen bei 1×1 liegt. Für 1×1 Matrizen ist die Determinante definiert als der Wert ihres einzigen Elements. Diese rekursive Definition geht auf den Mathematiker Pierre-Simon LAPLACE zurück und wurde nach ihm als LAPLACE'scher Entwicklungssatz für Determinanten benannt. Es heißt, dass man Determinanten nach einer bestimmten Spalte oder Zeile entwickelt. Diese Bedeutung wird unten weiter erläutert. Es spielt aber keine Rolle von welcher Zeile bzw. Spalte eine Determinante entwickelt wird; das Ergebnis bleibt gleich. Für die Entwicklung der Determinante $\det A$ der Matrix A nach der j-ten Spalte gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

und für die Entwicklung nach der i-ten Zeile gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

Dabei steht n für die Dimension der Matrix, j (bzw. i) für Spalte (bzw. Zeile) nach der entwickelt wird und a_{ij} für das Element in der Zeile i und der Spalte j. $\det A_{ij}$ ist die erwähnte Determinante der quadratischen Untermatrix der Dimension $(n-1) \times (n-1)$, welche durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Damit das Verfahren klar wird, betrachten wir nun die Fälle 2×2 und 3×3 und leiten deren Determinanten nach diesem Entwicklungssatz her. Als Entwicklungspunkt dient hier dabei stets die Spalte $j = 1$. Sei A eine 1×1-Matrix $(n = 1)$ mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

Nach dem LAPLACEschen Entwicklungssatz für Spalten gilt für ihre Determinante

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{1} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot \det A_{i1} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} \\ &= a_{11} \end{aligned}$$

Die Untermatrix A_{11} entfällt (bzw. wird zum neutralen Element 1) hier, da durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte nichts überbleibt. Sei B eine 2×2 Matrix $(n = 2)$ mit

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Nach dem LAPLACEschen Entwicklungssatz für Spalten gilt für ihre Determinante

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot b_{ij} \cdot \det B_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \cdot b_{i1} \cdot \det B_{i1} \\ &= (-1)^{1+1} \cdot b_{11} \cdot \det B_{11} + (-1)^{2+1} \cdot b_{21} \cdot \det B_{21} \\ &= 1 \cdot b_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix} - 1 \cdot b_{21} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= b_{11} \cdot a_{22} - b_{21} \cdot a_{12}$$
$$= ad - bc$$

Sei C eine 3×3 Matrix ($n = 3$) mit

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

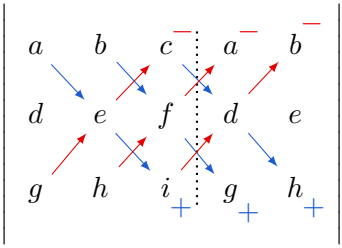
Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz für Spalten gilt für ihre Determinante

$$\begin{aligned}
\det C &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot c_{ij} \cdot \det C_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} \cdot c_{i1} \cdot \det C_{i1} \\
&= (-1)^{1+1} \cdot c_{11} \cdot \det C_{11} + (-1)^{2+1} \cdot c_{21} \cdot \det C_{21} \\
&+ (-1)^{3+1} \cdot c_{31} \cdot \det C_{31} \\
&= 1 \cdot c_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} - 1 \cdot c_{21} \cdot \det \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \\
&+ 1 \cdot c_{31} \cdot \det \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \\
&= c_{11} \cdot (c_{22} \cdot c_{33} - c_{32} \cdot c_{23}) - c_{21} \cdot (c_{12} \cdot c_{33} - c_{32} \cdot c_{13}) \\
&+ c_{31} \cdot (c_{12} \cdot c_{23} - c_{22} \cdot c_{13}) \\
&= c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} - c_{11} \cdot c_{32} \cdot c_{23} - c_{21} \cdot c_{12} \cdot c_{33} \\
&+ c_{21} \cdot c_{32} \cdot c_{13} + c_{31} \cdot c_{12} \cdot c_{23} - c_{21} \cdot c_{22} \cdot c_{13} \\
&= aei - ahf - dbi + dhc + gbf - dec \\
&= aei + bdi + bfg - (afh + bdi + cde)
\end{aligned}$$

Für Determinanten höherer Dimensionen ist das Vorgehen analog. Es ist schnell ersichtlich, dass die Komplexität mit zunehmendem n sehr stark zunimmt. Der Berechnungsaufwand für eine $n \times n$ Matrix ist von der Ordnung $\mathcal{O}(n!)$ während andere Berechnungsverfahren nur von der Ordung $\mathcal{O}(n^3)$ sind und daher in der Praxis häufiger verwendet werden als der Laplace'sche Entwicklungssatz.

Die 3×3 Matrix spielt eine große Rolle in der Physik. Ein gewisser Pierre Frédéric Sarrus entwickelte für diese Matrizen eine einfache Methode zur Determinantenberechnung. Für die sogenannte Regel von Sarrus schreibt man die ersten zwei Spalten der Matrix nochmals rechts daneben:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Longrightarrow$$



Entlang der Pfeile wird multipliziert und alle Pfade mit dem entsprechenden Vorzeichen (nach unten plus, nach oben minus) summiert: $\det A = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$. Diese Regel gilt ausschließlich für 3×3 Matrizen.

6.1.6 Geometrische Interpretation der Determinante

Bei einer linearen Transformation durch die Matrix A kommt es unter Umständen dazu, dass sich die Inhalte von Flächen bzw. Volumina ändern. Im zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ist der Inhalt des Einheitsquadrates eins, weil

der Inhalt des von den Basisvektoren aufgespannten Parallelogramms Eins beträgt.

Wird dieser Raum um die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

transformiert, ändern sich die Basisvektoren **i** und **j**:

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad L(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad L(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

In diesem Beispiel hat die Transformation zur Folge, dass sich der Inhalt des Einheitsqudrates um den Faktor 6 vergrößert. Die Determinante gibt genau diesen Dehnungs- bzw. Stauchungsfaktor an:

$$\det A = 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 6$$

Im Falle einer negativen Determinanten bedeutet dies, dass sich die Orientierung der Basisvektoren verändert hat. Im kart. Koordinatensystem steht **i** stets rechts von **j**. Bei einer Transformation durch die Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

steht **i** links von **j**, was bedeutet, dass die Determinante negativ sein muss. Der Betrag der Determinante gibt weiterhin das Dehnungsverhältnis an:

$$\det B = 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -5$$

Im Dreidimensionalen gibt die Determinante die Veränderung des Volumens des Einheitswürfels an. Der dadurch entstandene Körper nennt sich Parallelepiped. Eine negative Determinante bedeutet hier ebenfalls, dass sich die Orientierung der Basisvektoren geändert hat: Aus einem Rechtssystem wurde ein Linkssystem. Das heißt, dass die "Rechte-Hand-Regel" hier nicht mehr gilt.

Besondere geometrische Interpretationen hat eine Transformation einer Matrix, deren Determinante Null ist. Im zweidimensionalen bedeutet dies, dass der Inhalt des Einheitsparallelogramms auf den Wert Null geschrumpft ist. Das heißt in jedem Fall, dass sich die Dimension des Raumes um Eins verkleinert hat: alle Werte liegen nun auf einer Geraden. Im Dreidimensionalen bedeutet eine solche Transformation mindestens eine Dimensionierung ins Zweidimensionale. Bei einer Transformation durch eine Nullmatrix konzentriert sich der gesamte Raum auf den Ursprung und wird nulldimensional.

6.2 Lineare Transformation

Eine lineare Transformation oder lineare Abbildung ist eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen. Sie kann als Funktion f verstanden werden, die einen Vektorraum V in einen anderen Vektorraum W, die beide über demselben Körper K funktionieren, überführt ($f(V) = W$). Die Transformation wird durch eine quadratische $(n \times n)$ Matrix A beschrieben, deren n gleich der Dimension des Vektorraumes $\dim(V) = n$ ist. Sie gibt spaltenweise an, wie sich die Basisvektoren verändern. Dabei entstehen optische Krümmungen und Verzerrungen von Koordinatensystemen. Linear ist eine Transformation, wenn erstens der Koordinatenursprung an derselben Stelle bleibt und zweitens die optische Parallelität im Koordi-

natengitter erhalten bleibt. Sie muss verträglich mit der Vektorraumstruktur sein, also sich mit der zugrundeliegenden Addition und skalaren Multiplikation von Definitions- und Wertebereich vertragen. Für Summen muss

$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V \Big(v_3 = v_1 + v_2 \implies f(v_3) = f(v_1) + f(v_2) \Big)$$

also $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ und analog für skalare Multiplikation

$$\forall \tilde{v}, v \in V \, \forall \lambda \in K \Big(\tilde{v} = \lambda v \implies f(\tilde{v}) = \lambda f(v) \Big)$$

also $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ gelten.

Eine beispielhafte lineare Transformation L ist in Abb. 6.1 zu sehen. Das kartesische Koordinatensystem der Ebene wurde um die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$ transformiert. Die Transformation verändert die Position der Basisvektoren **i** und **j** durch Multiplikation mit A

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L(\mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und somit die gesamte Ausrichtung und Skalierung des Systems. Jeder Vektor des Vektorraumes wird durch Multiplikation mit A transformiert. In der Abbildung ist beispielsweise der Vektor $\vec{v} = (-\mathbf{i}, -2\mathbf{j})$ in den Vektor $L(\vec{v})$ transformiert wurden:

$$L(\vec{v}) = A \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

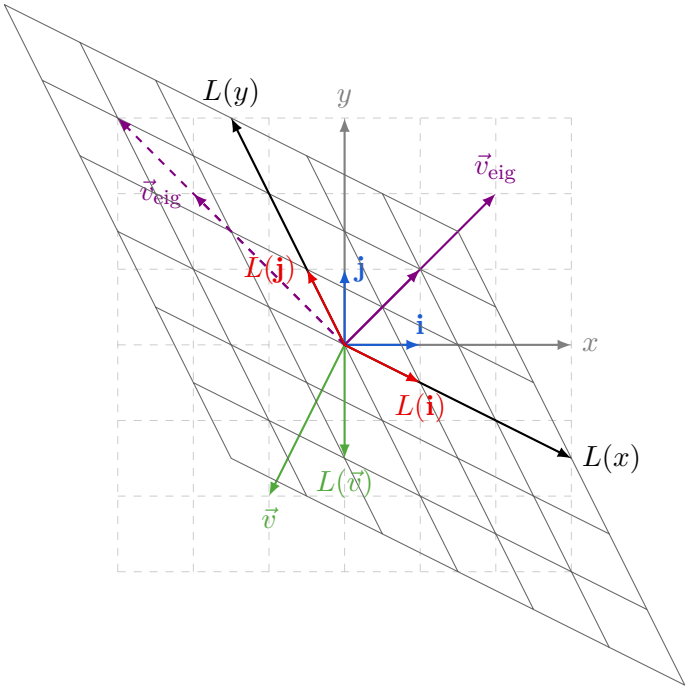


Abb. 6.1: Lineare Transformation des kart. Koordinatensystems

Es gibt Vektoren (abgesehen vom Nullvektor), die bei der Transformation ihre Ausrichtung beibehalten. Solche werden Eigenvektoren genannt. In diesem Fall gilt $A \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert des Eigenvektors genannt wird. Zur Berechnung überführt man den Ausdruck in

$$A \cdot \vec{v} - \lambda\vec{v} = (A - \lambda E) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

mit E als Einheitsmatrix und da $\vec{v} \neq \vec{0}$ vorausgesetzt wird, ist dieses Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $\det(A - \lambda E) = 0$ gilt. Jeder Vektor kann Eigenvektor sein (beispielsweise

bei einer reinen Skalierung des Vektorraumes (sei $A = \lambda E$ mit E als Einheitsmatrix)) aber auch keiner (beispielsweise bei einer reinen Rotation des Vektorraumes).

In Abb. 6.1 sind die Eigenvektoren (der Lesbarkeit wegen doppelt so lang) $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ und $(-\mathbf{i}, \mathbf{j})$ mit den Eigenwerten $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ eingezeichnet. Sie können folgendermaßen berechnet werden:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -0.5 \\ -0.5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Longrightarrow \lambda \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$$

Diese Berechnung liefert zunächst die Eigenwerte zu den existierenden Eigenvektoren. Für das erste $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ gilt des Weiteren

$$A - \lambda_1 E = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

und mit $(A - \lambda_1 E) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ kann das homogene lineare Gleichungssystem durch ein bekanntes Verfahren gelöst werden:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung $x = y$, was bedeutet, dass der zu λ_1 zugehörige Eigenvektor die Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat. Analog hierzu berechnet sich der zweite Eigenvektor.

Der Inhalt eines Einheitsvierecks im kartesischen System beträgt bekanntlich eins. Das Einheitsviereck stellt in jedem System jenes Viereck dar, das von den Basisvektoren aufgespannt wird. Im Dreidimensionalen wird ein Einheitsparallel-

epiped aufgespannt. Im transformierten System kann der Inhalt über die allgemeine Formel für den Flächeninhalt von Dreiecken

$$\begin{aligned} A_E &= 2 \cdot \frac{1}{2} \|\mathbf{i}\| \, \|\mathbf{j}\| \sin\gamma, \quad \gamma = \arccos\left(\frac{\mathbf{i} \circ \mathbf{j}}{\|\mathbf{i}\| \, \|\mathbf{j}\|}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{5}}{2} \sin\arccos\left(\frac{-0.5 - 0.5}{\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}}\right) \\ &= \frac{5}{4} \sin\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

berechnet werden. Dies entspricht definitionsgemäß der Determinante von A ($\det A = \frac{3}{4}$).

6.3 Cramer'sche Regel

Zwischen linearen Gleichungssystemen und linearer Algebra besteht ein großer Zusammenhang. Mithilfe dieser nach dem Mathematiker Gabriel Cramer benannten Regel lassen sich alle linearen Gleichungssysteme lösen, deren Determinante nicht Null ist. Ihre Herleitung ist insbesondere von geometrischer Bedeutung. Es wird folgendes Beispiel betrachtet:

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 2y = -4 \\ -1x + 2y = -2 \end{array} \right|$$

Gesucht ist sozusagen das Zahlentupel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, das beide Gleichungen erfüllt. Das System lässt sich in den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot \vec{x} = \vec{v}$$

überführen. Geometrisch verbirgt sich dahinter auf der linken Seite eine Matrix, die mit einem unbekannten Vektor (2×1 Matrix) multipliziert wird; auf der rechten Seite ein anderer Vektor. Die Frage, die hinter dieser Gleichung steht, lautet:

> *"Welcher Vektor, der durch A transformiert wird, ergibt $\vec{v}$?"*

Für den vom Basisvektor $\mathbf{j}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Flächeninhalt gilt $A_y = \|\mathbf{j}\| \cdot y = y$ und umgekehrt $A_x = \|\mathbf{i}\| \cdot x = x$. Eine Transformation dehnt oder streckt jeden Flächeninhalt um den Faktor der Determinante der Transformationsmatrix. Die neuen Flächen betragen also $A_{T(x)} = \det A \cdot x$ und $A_{T(y)} = \det A \cdot y$ und demzufolge

$$x = \frac{A_{T(x)}}{\det A}, \quad y = \frac{A_{T(y)}}{\det A}$$

Bei $A_{T(x)}$ bzw. $A_{T(y)}$ handelt es sich um die Flächen der aufgespannten Parallelogramme zwischen den transformierten Basisvektoren und des bekannten Vektors $\vec{v}$. Die Definition für den aufgespannten Flächeninhalt zweier Vektoren ist bereits bekannt, weshalb folgt, dass

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A}$$

A_x ist hierbei die Matrix A, bei der die gesamte erste Spalte mit dem Vektor $\vec{v}$ ersetzt wurde. Für das Beispiel bedeutet das, dass

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{-8+4}{6+2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \frac{-6-4}{6+2} = -\frac{5}{4}$$

$$\implies (x, y) \in \left\{ \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4} \right) \right\}$$

Beweis für höhere Dimensionen:
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Es sei vorausgesetzt, dass die quadratische Matrix A invertierbar ($\det A \neq 0$) ist. Die Matrix A_i ist definiert als A, wobei die i-te Spalte durch den Lösungsvektor $\vec{v}$ substituiert ist:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & v_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & v_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & v_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Für den Beweis verwendet man eine Matrix X_i, die entsteht, wenn die i-te Spalte einer Einheitsmatrix durch $\vec{v}$ ersetzt wird. X_2 für ein System aus vier Gleichungen sehe folgendermaßen aus:

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es lässt sich beweisen, dass die Zusammenhänge $AX_i = A_i$ und $\det X_i = x_i$ gelten. Deshalb folgt:

$$\begin{aligned} \det A \cdot \det X_i &= \det A_i \\ \det A \cdot x_i &= \det A_i \\ \therefore x_i &= \frac{\det A_i}{\det A} \end{aligned} \quad \square$$

Aus diesen Zusammenhängen lässt sich erkennen, dass für ein Gleichungssystem keine Lösung existiert, wenn die Determinante von A den Wert Null annimmt.

Kapitel 7

Stochastik

Die Stochastik umfasst im Allgemeinen (die unter "echten" Mathematikern eher unbeliebte) Wahrscheinlichkeitsrechung sowie auch letztendlich Teilgebiete der Statistik. Sie ist deshalb so unbeliebt, weil sie keine deterministischen Aussagen über die Realität geben kann, sondern lediglich ein numerisches Gedankengebäude schafft, dass Aussagen darüber trifft, was eigentlich sein "müsste" oder eben "könnte". Zwei Konjunktive, die Mathematik-Begeisterte nicht gern hören.

7.1 Kombinatorik

In der Kombinatorik beschäftigt man sich im Allgemeinen mit der Frage: "Wie viele Möglichkeiten gibt es?" Dabei unterscheidet man in drei Kriterien: I. Werden alle Elemente betrachtet? II. Wird die Reihenfolge der Elemente betrachtet? III. Können Elemente wiederholt auftreten?

7.1.1 Die Fakultät

Die Fakultät ist eine für die Stochastik unabdingbare Rechenoperation, die mit ! gekennzeichnet und "Fakultät" gesprochen wird. Das Zeichen ! hinter einer Zahl n bedeutet, dass alle natürlichen Zahlen von n bis 1 miteinander multipliziert werden. Mathematisch schreibt man:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \quad k, n \in \mathbb{N}$$

7.1.2 Permutationen

Die Permutation einer n-elementigen Menge ist die Anzahl aller Anordnungen, in welcher ihre Elemente vorkommen können. Es werden also alle Elemente betrachtet. Da man bei der Betrachtung aller Elemente immer automatisch die Reihenfolge untersucht, wird nur zwischen Permutationen mit sich wiederholenden Elementen und nicht wiederholenden Elementen unterschieden.

I) Ohne Wiederholung
Diese Permutationsart ist einfach zu verstehen: Alle n unterschiedlichen Elemente einer Menge werden angeordnet. Für den n-ten Platz gibt es n Elemente, für den $(n-1)$-ten Platz gibt es $(n-1)$ Elemente und das bis 1. Die Permutation berechnet sich aus:

$$P = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad \square$$

II) Mit Wiederholung
Eine Permutationsart mit sich wiederholenden Elementen ist

von der Definition her irreführend, denn ein definiertes Element kann nicht zwei Plätze einer Anordnung gleichzeitig annehmen. Eine Permutation mit sich wiederholenden Elementen bedeutet, dass aus den n Elementen einer Menge k_i Elemente gleich sind. Man stelle sich eine Menge M vor, in der zweimal das Element x und dreimal das Element y sowie viermal das Element z vorhanden sind. Möchte man nun die Anzahl der Anordnungen rausfinden, so muss man berücksichtigen, dass in $n!$ einige Anordnungen gleich sind, da mehrere Elemente des gleichen Werts auftreten. Aus diesem Grund müssen diese Anordnungen "herausdividiert" werden.
Die Permutation berechnet sich aus:

$$P = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_i!} \qquad \square$$

7.1.3 Variationen

Betrachtet man in einer n-elementigen Menge nur noch k Elemente, so handelt es sich entweder um Variationen oder Kombinationen. Bei der Variation untersucht man, in welchen verschiedenen Reihenfolgen k Elemente einer n-elementigen Menge vorkommen können. Dementsprechend ist die Variation ähnlich zur Permutation, mit dem Unterschied, dass nicht alle Elemente vorkommen.

I) Ohne Wiederholung
Bei einer Variation ohne Wiederholung kann kein Element der Menge doppelt vorkommen. Jedes Element ist in seiner Reihenfolge sozusagen eineindeutig. Möchte man die Anzahl der Anordnungen für genau k Elemente der insgesamt n-elementigen Menge wissen, multipliziert man wie bei der Permutation ohne Wiederholung alle zur Verfügung stehenden Elemente

nacheinander bis alle k Plätze belegt sind, also:

$$V = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k}$$

Formt man diesen Term weiter um, erhält man:

$$\begin{aligned} V &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \quad \square \end{aligned}$$

II) Mit Wiederholung
Bei einer Variation mit Wiederholung können Elemente der Menge mehrfach vorkommen. Dementsprechend stehen für alle Plätze der Anordnungen alle n Elemente zur Verfügung. Es berechnet sich die Variation von k Elementen aus der n-elementigen Menge durch:

$$V = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k \quad \square$$

7.1.4 Kombinationen

Im Gegensatz zu Variationen geht es bei Kombinationen um die Anzahl der k-Elementigen Gruppen, die aus einer n-elementigen Menge gebildet werden können. Die Reihenfolge, in welcher die k Elemente innerhalb der Gruppe vorliegen, ist dabei irrelevant. Auch Kombinationen unterscheidet man in:

I) Ohne Wiederholung
Bei einer Kombination ohne Wiederholung treten keine Elemente innerhalb der Gruppe mehrmals auf. Die Kombination

berechnet sich ähnlich wie die Variation, nur ist die Frage eine andere: Bei der Variation wird gefragt, wie viele Elemente für den x-ten *Platz* zur Verfügung stehen. Bei der Kombination ist die Frage, wie viele Elemente für die Wahl eines k-ten "Gruppenmitglieds" zur Verfügung stehen. Bei k-elementigen Gruppen einer n-elementigen Menge also n bis $(n-k+1)$. Nun muss jedoch beachtet werden, dass bei dieser bisher berechneten Variation die Reihenfolge eineindeutig festgelegt ist. Ob nun aber das $k_i$te Element an erster oder fünfter Stelle steht, ist irrelevant. Somit sind alle Variationen mit den entsprechend eineindeutig definierten k Elementen gleichwertig und insgesamt eine Kombination. Möchte man nun wissen, wie viele Variationen diese Kombination hat, so überlege man, wie viele Reihenfolgen k Elemente haben können (siehe Permutation). Bei k Elementen sind das genau $k!$. Diese Variationen werden nun "herausdividiert" und es gilt:

$$\begin{aligned} K &= \frac{\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k}}{k!} \\ &= \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \square \end{aligned}$$

Dieser Term wird in der Stochastik als Binomialkoeffizient bezeichnet und

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

notiert (sprich: "n über k" oder "k aus n").

Das berühmteste Anwendungsbeispiel für eine Kombination dieser Art ist das Glücksspiel "6 aus 49". Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, also alle sechs richtigen Zahlen (völlig egal in welcher Reihenfolge) zu raten, liegt bei

$$1 : \binom{49}{6} = 1 : 13\ 983\ 816$$

II) Mit Wiederholung
Um die Kombination mit Wiederholung in ihrer Logik durchsteigen zu können, benötigt es eine kreative Vorstellungskraft. Es geht bei dieser Art der Kombination darum, welche Gruppen man bilden kann, auch wenn man dabei ein Element mehr als ein mal wählt. Man stelle sich bei der n-elementigen Menge aus der man eine k-elementige Gruppe wählt folgendes vor: Für die Wahl des ersten Elements stehen einem n Elemente zur Verfügung. Für die Wahl des zweiten Elements wiederum n, denn wir legen das gewählte Element zurück in die Menge. Jetzt muss jedoch beachtet werden, dass das gewählte Element nach eindeutiger Zuordnung für die nächste Wahl hinsichtlich der Anzahl der Möglichkeiten "dupliziert" wird. Daraus ergibt sich $n+1$. Führt man dies weiter bis alle k Elemente gewählt sind, so ergibt sich:

$$\underbrace{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}_{k}$$

oder

$$\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

Wie bei jeder Kombination muss die Permutation der k-elementigen Gruppe mit berücksichtigt werden.
So ergibt sich:

$$K = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \qquad \square$$

7.1.5 Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient ist definiert als:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

sprich: n über k oder k aus n.

Es gilt:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k+k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)n! + (k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{(k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} \quad \square$$

7.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

Die Wahrscheinlichkeit ist prinzipiell erst einmal ein Maß für die Häufigkeit eines unsicheren Ereignisses. In der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sich in der Mathematik über die letzten Jahrhunderte immer weiter entwickelte, gibt es unterschiedliche Auffassungen des Begriffes selbst.

In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, die maßgeblich von Jakob I. Bernoulli und Pierre-Simon Laplace geformt wurde, geht man davon aus, dass alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs berechenbare, von vornherein ("A priori") klar festgelegte Wahrscheinlichkeiten haben. Demnach ist ein Zufallsversuch komplett berechenbar, ohne ihn überhaupt durchführen zu müssen.

Der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit ergänzt die klassische Stochastik. Er besagt, dass bei einem Zufallsexperiment niemals eine deterministische, also klar angebende Aussage darüber geben könnte, welches Ereignis tatsächlich eintritt. Lediglich eine exakt mathematische Abschätzung ist hier möglich. Dem entgegen steht wiederum der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff. Dieser meint die Einflussnahme der eigenen Erfahrungen in die Wahrscheinlichkeit, die durch äußere Faktoren abgeändert werden könnte. Oftmals ist es jedoch eine Illusion, dass sich Wahrscheinlichkeiten aufgrund bestimmter Erfahrungen ändern. Eine korrekte mathematische Abschätzung ist daher unabdingbar.

Zuletzt ist es noch wichtig, die axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit durch Andrei Kolmogorow zu erwähnen. Durch seine Axiome wird die heutige Wahrscheinlichkeit maßgeblich definiert.

Axiome der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogorow:

1. Für jedes Ereignis $A \in \Sigma$ ist die Wahrscheinlichkeit von A eine reelle Zahl zwischen 0 und 1: $0 \leq P(A) \leq 1$

2. Das sichere Ereignis $\Omega \in \Sigma$ hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(\Omega) = 1$.

3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzählbar vieler inkompatibler Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Dabei heißen Ereignisse A_i inkompatibel, wenn sie paarweise disjunkt, also bei $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, sind. Es gilt daher $P\left(A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \cdots\right) = \sum P(A_i)$. Diese Eigenschaft wird auch σ-Additivität genannt.

7.2.1 Grundlegende Begriffe

Da die Wahrscheinlichkeitstheorie eher einen sehr reellen, kohärenten Charakter hat, benötigt es zur Bildung eines mathematischen Gebildes einige definierte Begrifflichkeiten, die dann mathema-tisch-abstrakte Objekte mit gewissen Eigenschaften bezeichnen. Man betrachte ein beliebiges reales Zufallsexperiment Z, das den Axiomen von Kolmogorow folgt:

Ergebnis & Ergebnismenge

Ein beliebiges Ergebnis E des Zufallsexperiments Z ist ein möglicher konkreter Ausgang, ein bestimmter Wert, der bei der Durchführung des Experiments eintreten und gemessen

werden kann. Betrachtet man zum Beispiel das Werfen einer Münze, so hat dieses Zufallsexperiment zwei mögliche Ergebnisse: Kopf oder Zahl. Bei der Durchführung des Experiments tritt immer konkret eines der beiden Ergebnisse ein. Wichtig zu erwähnen ist auch, dass ein Zufallsexperiment **immer** ein Ergebnis zeigt. Auch das Stehenbleiben auf der Kante der Münze, welches trivialerweise immer vernachlässigt wird, ist ein mögliches Ergebnis des Zufallsexperiment "Münze werfen ". Alle möglichen Ergebnisse E_i des Zufallsexperiments Z bilden dann die Ergebnismenge Ω. Es gilt des Weiteren elementar:
Jedes mögliche Ergebnis E_i ist immer Teil der Ergebnismenge und jedes unmögliche Ergebnis F_i kann nie Element der Ergebnismenge sein.

$$\{E_i\} \backslash \Omega = \{\emptyset\} \wedge \{F_i\} \cap \Omega = \{\emptyset\}$$

In der Statistischen Stochastik werden die Ergebnisse immer in Form von konkreten Werten angegeben, die die zu betrachtende Zufallsvariable annehmen kann. Man schreibt:

$$X_k = k \quad \text{mit } X{:=}\text{Zufallsvariable und } k{:=}\text{Ergebnis}$$

Ereignis & Ereignisraum

Ein Ereignis A ist eine Teilmenge der Ergebnismenge. Das bedeutet, dass zu einem Ereignis ein oder mehrere Ergebnisse gehören, die dann Elemente der Teilmenge A sind. Reell gesehen ist ein Ereignis also kein konkreter Ausgang eines Zufallsexperiments, sondern eine Kombination von einem oder mehreren Ergebnissen, durch die das Ereignis automatisch eintritt, sobald eines der Ergebnisse angenommen wird. Man stelle sich beispielhaft das Würfeln eines sechsseitigen Würfels vor. Die

Ergebnisse, die dieses Zufallsexperiment ausgeben kann, sind: {1},{2},{3},{4},{5},{6}. Ein Ereignis A wäre zum Beispiel: "Zahl größer 4". Man spricht dann davon, dass das Ereignis A eintritt, wenn die Ergebnisse 5 oder 6 erscheinen. Alle Ereignisse bilden dann (komplementär zur Beziehung von Ergebnis und Ergebnismenge) den Ereignisraum $P\{\Omega\}$. Da alle Ereignisse A_i Teilmengen von Ω sind und der Ereignisraum die Menge aller Ereignisse des Zufallsexperiments Z sind, ist der Ereignisraum $P\{\Omega\}$ die Potenzmenge von Ω, also die Menge aller Teilmengen von Ω. Bei einer Mächtigkeit der Ergebnismenge Ω von n, $|\Omega| = n$, ist $|P\{\Omega\}| = 2^n$. Dies wird im Kapitel 9.2.8 bewiesen.

Es ist zu betonen, dass der Ereignisraum nicht alle möglichen Ereignisse betrachtet, sondern alle Ereignisse, die die Ergebnismenge zulässt, also auch Ereignisse, die in der realen Welt nie eintreten werden. Denn nur, weil ein Ereignis im Ereignisraum enthalten ist, bedeutet das nicht, dass die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nicht Null sein kann. Beispielsweise gehört zum Ereignisraum des Zufallsexperiments "Münze werfen" auch das Ereignis $\{\emptyset\}$, das niemals eintreten kann, weil immer entweder Kopf oder Zahl erscheint (oder sogar Kante). Im Nachfolgenden wird nur noch von Ereignissen gesprochen, aus dem einfachen Grund, dass jedes Ergebnis automatisch auch ein Ereignis darstellt. Die Ergebnismenge ist im Ereignisraum enthalten.

Wahrscheinlichkeit, relative und absolute Häufigkeit

Führt man ein Zufallsexperiment immer wieder durch, so gibt die sogenannte absolute Häufigkeit H an, wie oft ein Ereignis tatsächlich eingetreten ist. Erscheint bei achtmaligem Werfen einer Münze fünfmal Kopf, so ist $H(\text{Kopf}) = 5$. Die relative Häufigkeit h ist dann das Verhältnis von absoluter Häufigkeit

zur Gesamtzahl der Wiederholungen. Hier demnach $\frac{5}{8}$. Es gilt

$$h_n(A_i) = \frac{H_n(A_i)}{n}$$

wobei n die Anzahl der Wiederholungen und A_i das Ereignis ist.
Wiederholt man ein Zufallsexperiment unendlich oft, so konvergiert die relative Häufigkeit $h(A)$ des Ereignisses A gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A. Die relative Häufigkeit nähert sich der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit also an. Es ist demnach zu schlussfolgern, dass die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses angibt, wie oft das Ereignis im Zufallsexperiment Z durchschnittlich eintritt. Damit lässt sich eine Abschätzung treffen, die so ziemlich die grundlegende Bedeutung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Allgemeinen zusammenfasst. Es gilt für Wahrscheinlichkeiten (angelehnt an die Axiome von Kolmogorow) weiterhin empirisch:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $\forall A_i \; \exists \overline{A_i} : P(A) = 1 - P(\overline{A})$

7.2.2 Laplace-Versuche

Pierre-Simon Laplace war ein französischer Mathematiker, der Anfang des 18. Jahrhunderts sein erstes Werk über die Wahrscheinlichkeit veröffentlichte. In diesem definierte er den Begriff Wahrscheinlichkeit erstmals und schrieb seinen Zufallsexperimenten konkrete Eigenschaften zu. Der klassische und einfachste Zufallsversuch nach Laplace wird heutzutage Laplace-Versuch genannt. Ein Laplace-Versuch hat folgende Eigenschaften:

1. Der Ausgang des Experiments ist nicht eindeutig vorhersehbar.

2. Es existieren mehrere Ergebnisse als Ausgänge des Experiments: $\exists E_i \in \Omega, i \leq 0$

3. Das Zufallsexperiment kann beliebig oft wiederholt werden, ohne dass sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse ändern.

4. Alle Ergebnisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit: $P(E_i) = k$

Daraus folgt:

$$P(E_i) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \text{und} \quad P(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|}$$

7.2.3 Mehrstufige Zufallsversuche

Oftmals ist es so, dass Zufallsversuche in der Realität nicht nur eine Stufe haben, sondern aufeinanderfolgende Zufälligkeiten zu einem Umstand gehören. Zu deren Veranschaulichung werden sogenannte Baum- oder Wahrscheinlichkeitsdiagramme aufgestellt, durch welche der Sachverhalt besser durchdringbar ist. Mehrstufige Zufallsversuche sind alle die, bei denen mehrere zufällige Ereignisse aufeinanderfolgen. Ein mehrstufiger Zufallsversuch ist z. B. das mehrmalige Ziehen von Kugeln aus einer Urne (das Lieblingsbeispiel eines jeden Stochastikers).

Ein Baumdiagramm ist so aufgebaut, dass aus einem Ausgangspunkt Pfade entspringen, an deren Ende bestimmte Ereignisse stehen. Für aufgestellte Baumdiagramme gelten weiterhin die Merksätze:
"Entlang der Pfade wird multipliziert" und "Zwischen den Pfaden wird addiert"

Beweis:
Betrachtet wird das Zufallsexperiment "Münze werfen" für genau zwei Würfe. Dabei wird immer die gleiche Münze genommen und man nehme zusätzlich an, die Münze sei ideal, also beide Seiten der Münze glatt, die Dicke der Münze nahezu Null und des Weiteren sei sie ohne Verbiegungen oder sonstige Verformungen.
Aus dieser Beschreibung ergibt sich folgende Ergebnismenge (für einen Wurf):

$$\Omega = \{k, z\}$$

Mit k für Kopf und z für Zahl.
Führt man das Experiment nun zweimal hintereinander durch, so ergibt sich folgendes Baumdiagramm:

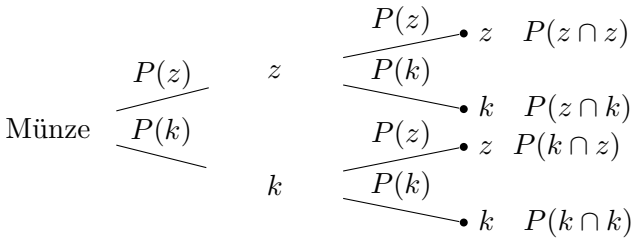


Abb. 7.1: Baumdiagramm zum Experiment "Münze-Werfen" allgemein

Aus jedem Ende eines Pfades entspringen jeweils die Pfade, die die weiteren Ausgänge des Zufallsexperiments sein könnten. Jeder Pfad hat eine gewisse Wahrscheinlichkeit. In unserem Beispiel handelt es sich um einen LAPLACE-Versuch. Der semantische Unterschied zwischen "Kopf" und "Zahl" ist hier irrelevant, beide Seiten treten gleich oft auf. Und da es die beiden einzig möglichen Ergebnisse sind, gilt also:

$$P(z) = P(k) = \frac{1}{2}$$

Alle Wahrscheinlichkeiten der Enden der Pfade, die aus einem gemeinsamen Ursprung entspringen, ergeben die Wahrscheinlichkeit des Ursprungs (siehe KOLMOGOROW). Die Wahrscheinlichkeiten der Pfade, die nach einem Ereignis folgen, geben also wiederum an, zu welchen Teilen nach dem Ereignis das Nächste eintritt und so weiter. Es ergibt sich speziell bei diesem Experiment also die Schleife: "Die Hälfte aus der Hälfte aus der Hälfte usw. ...". Die Wahrscheinlichkeiten werden also miteinander multipliziert und es gilt:

$$P(i) \cdot P(j) = P(i \cap j) \quad \square$$

Dass sich die Wahrscheinlichkeiten entlang der Pfade addieren, geht direkt aus dem dritten KOLMOGOROWschen Axiom hervor. $\square$

Das vollständig ausgefüllte Baumdiagramm lautet also:

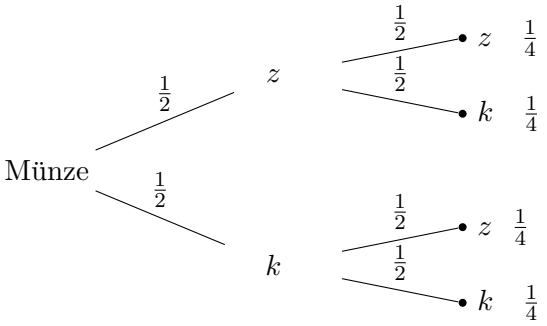


Abb. 7.2: Baumdiagramm zum Experiment "Münze-Werfen" spezifisch

7.2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Stochastische Unabhängigkeit

Natürlich wird der Leserin oder dem Leser in diesem Moment auffallen müssen, dass reale Zufallsexperimente niemals so exakte mathematische Voraussetzungen bieten, wie es im Kapitel 7.2.3 demonstriert wurde. Vielmehr kommt es dazu, dass mehrere zufällige Eigenschaften eines gewissen Experiments einander gegenseitig bedingen können. In diesem Fall kommt es zu Verschiebungen, zu Veränderungen der Wahrscheinlichkeiten innerhalb des Versuchs, wenn gewisse Teilereignisse bereits eingetreten sind oder nicht. Bedingte Wahrscheinlichkeiten werden so notiert:

$$P(E \mid F)$$

gesprochen: Die Wahrscheinlichkeit von (Ereignis) E bedingt durch (Ereignis) F.

Bei bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt also

$$P(F) \cdot P(E \mid F) = P(E) \cdot P(F \mid E) = P(E \cap F),$$

was aber nicht ausschließt, dass

$$P(E \mid F) \neq P(E) \ \vee \ P(F \mid E) \neq P(F).$$

Falls nämlich $P(E \mid F) = P(E) \ \wedge \ P(F \mid E) = P(F)$ gelten sollte, dann gilt auch:

$$P(E) \cdot P(F) = P(E \cap F)$$

In diesem Fall bezeichnet man die Ereignisse E und F stochastisch unabhängig.

Das Obige fand allerdings ein gewisser Thomas Bayes schon 300 Jahre vor uns heraus, weshalb aus den Gleichungen der sogenannte Satz von Bayes hervorgeht.

$$P(E) \cdot P(F \mid E) = P(E \cap F)$$

$$P(F \mid E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

bzw.

$$P(F \mid E) = \frac{P(F) \cdot P(E \mid F)}{P(F) \cdot P(E \mid F) + P(\overline{F}) \cdot P(E \mid \overline{F})}$$

7.2.5 Bernoulli-Ketten

Auch ein gewisser Daniel Bernoulli interessierte sich im 18. Jahrhundert für die mysteriöse Stochastik. Er charakterisierte eine besondere Art mehrstufiger Zufallsversuche: die sogenannten Bernoulli-Versuche.

Diese Art Zufallsversuche besitzen folgende Eigenschaften:

1. Beim Ausgang einer Wiederholung des Experiments wird ein und dasselbe Ereignis E mit seinem Gegenereignis $\overline{E}$ betrachtet.

2. Es existieren die Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ und $P(\overline{E})$ zwischen Null und Eins: $\exists P(E), P(\overline{E}),\ 0 \leq P(E), P(\overline{E}) \leq 1$

3. Beim n-maligen Wiederholen des Zufallsexperiments bedingen sich die Wahrscheinlichkeiten nicht. Die Ereignisse E und $\overline{E}$ sind stochastisch unabhängig: $P(E) \cdot P(\overline{E}) = P(E \cap \overline{E})$

Betrachtet wird also ein mehrstufiger Zufallsversuch mit n Stufen, bei dem sich die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses (und Gegenereignisses) nicht verändern. Ein Bernoulli-Versuch mit vier Stufen könnte beispielsweise so dargestellt werden:

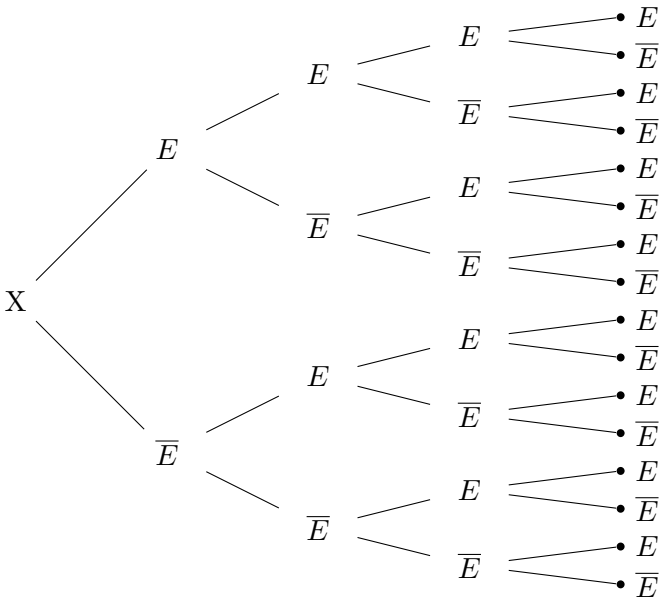


Abb. 7.3: Vierstufiges Baumdiagramm

Die Regeln für einen mehrstufigen Zufallsversuch gelten auch bei den Bernoulli-Versuchen. σ-Additivität und disjuktive Produktivität werden nicht verletzt. Bei Bernoulli-Versuchen ist es allerdings oft der Fall, dass n, die Anzahl der Stufen, so groß ist, dass die Anzahl der Pfade (2^n) exponentiell größer und eine einzelne Betrachtung kaum noch relevant ist. Viel mehr kommt es auf die bloße Häufigkeit bzw. Kombination

aus Häufigkeiten der entsprechenden Ereignisse und Gegenereignisse an, weshalb die Bedeutung der Reihenfolge verloren geht. Möchte man beispielsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Durchführung des (oben dargestellten vierstufigen) Experiments einmal E eintritt und dreimal $\overline{E}$, dann ist dies die Summe aus

$$P(E \cap \overline{E} \cap \overline{E} \cap \overline{E}) + P(\overline{E} \cap E \cap \overline{E} \cap \overline{E})$$
$$+P(\overline{E} \cap \overline{E} \cap E \cap \overline{E}) + P(\overline{E} \cap \overline{E} \cap \overline{E} \cap E)$$

und da sich die Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ und $P(\overline{E})$ über den Zufallsversuch nicht verändern also:

$$P(E) \cdot P(\overline{E})^3 + P(E) \cdot P(\overline{E})^3 + P(E) \cdot P(\overline{E})^3 + P(E) \cdot P(\overline{E})^3$$
$$= 4 \cdot P(E) \cdot P(\overline{E})^3$$

Mit einer etwas anderen Beschreibung des Zufallsversuches sowie etwas Vorstellungskraft gelangt man zu einer allgemeineren Formel für Wahrscheinlichkeiten bei BERNOULLI-Versuchen.

Man bezeichne eine Zufallsvariable X, die die Anzahl der bei einem n-stufigen BERNOULLI-Versuch auftretenden Ereignisse E angibt. Dabei kann diese Zufallsvariable die Werte $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ annehmen. Nehme man nun an, das Ereignis E würde bei n-maligem Wiederholen des Versuches k mal auftreten, also $X = k$, dann bekäme man die Anzahl der Pfade, bei denen das der Fall ist, durch die kombinatorische Betrachtung: k aus n Pfaden sollen E sein, also eine Kombination $\binom{n}{k}$ (siehe 7.1.4). Und da die Wahrscheinlichkeit dieser Pfade gleich bleibt (siehe Definition BERNOULLI-Versuch), ergibt sich das Produkt:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot P(E)^k \cdot P(\overline{E})^{n-k}$$

Des Weiteren gilt $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$ womit nur noch die Wahrscheinlichkeit von E notwendig ist, sodass es ausreicht $P(E) = p$ zu bezeichnen und deshalb:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Mithilfe der Additivität können nun auch variablere Formeln für X gefunden werden, wie beispielsweise:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Da der Binomialkoeffizient hier eine bedeutende Rolle spielt, bezeichnet man Sachverhalte, die sich durch Bernoulli-Versuche beschreiben lassen, als binomialverteilt.

7.3 Statistische Stochastik

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns weniger mit dem Beweis eines bestimmten Zusammenhangs zwischen mathematischen Objekten. Das Nachfolgende ähnelt vielmehr einer Erklärung bzw. Definition, gerade weil es in der statistischen Stochastik nicht um die Objekte selbst, sondern um deren Funktion geht, nämlich einen Maßstab zu setzen. Die Aufgabe der statistischen Stochastik ist es, aus Datenmengen Erkentnisse zu fassen. Die Auswertung der Daten erfolgt über Berechnungen, die nur definiert, nicht bewiesen werden müssen. Was am Ende mit dem Zahlenwert angefangen werden kann, bestimmt nur die Berechnung, nicht der Zusammenhang an sich.

7.3.1 Arithmetisches Mittel

Das arithmetische Mittel, auch umgangssprachlich bekannt als der *Durchschnitt*, ist der Mittelwert einer bestimmten Menge an Zahlen. Auf der reellen Zahlengerade kann sich das artihmetische Mittel daher als Mittelpunkt aller zu betrachtetenden Zahlen vorgestellt werden. Auf der komplexen Zahlenebene und auch allen weiteren Zahlenebenen ist das arithmetische Mittel nicht mit dem reellen arithmetischen Mittel zu vergleichen, weil die Erweiterung der reellen Zahlen um weitere Dimensionen den Verlust von Ordnung bedeutet.
Eine Herleitung des arithmetischen Mittels kann daher intuitiv gedacht werden:

Nehme man sich zwei Zahlen a und b, die nicht gleich sind $a \neq b$, und stelle sich vor, die Zahlen lägen als Punkte entsprechend ihres Betrags weit entfernt vom Ursprung auf der Zahlengeraden. Der Durchschnitt bzw. der Mittelwert $\bar{x}$ läge dann in der Mitte des Abstandes der beiden Punkte.
Da $a \neq b$ können zwei verschiedene Fälle eintreten:

$$I)\ a < b : \bar{x} = a + \frac{b-a}{2} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = b - \frac{b-a}{2}$$

$$II)\ a > b : \bar{x} = a - \frac{b-a}{2} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = b + \frac{b-a}{2}$$

$$\Rightarrow 2\bar{x} = a + \frac{b-a}{2} + b - \frac{b-a}{2} \quad \text{bzw.} \quad 2\bar{x} = a - \frac{b-a}{2} + b + \frac{b-a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{a+b}{2} \quad \square$$

Entsprechend dem Zusammenhang $n \cdot \bar{x} = k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n$ definiert man für n Zahlen das arithmetische Mittel wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} k_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} k_i$$

7.3.2 Erwartungswert

Der Erwartungswert kann als eine Erweiterung des arithmetischen Mittels betrachtet werden. Hier bezieht man jedoch die Wahrscheinlichkeit bzw. die Häufigkeit eines Ergebnisses in die Berechnung mit ein.
Betrachtet man einen Zufallsgröße X, die die Größe des Ergebnisses eines Zufallsversuchs mit den drei möglichen Ausgängen $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist, dann ergibt sich der Erwartungswert $E(X)$ (oder μ) aus der Summe der Ergebnisse multipliziert mit ihren Wahrscheinlichkeiten $P(X = a), P(X = b)$ und $P(X = c)$:

$$E(X) = P(X = a) \cdot a + P(X = b) \cdot b + P(X = c) \cdot c$$

Für n verschiedene Ausgänge des Zufallsexperiments und den möglichen Zufallsergebnissen k_n ergibt sich der Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} P(x = k_i) \cdot k_i$$

Analogie zum arithmetischen Mittel (7.3.1):

$$P(X = k_i) = \frac{H(k_i)}{|\Omega|}, \quad H := \text{absolute Häufigkeit}$$

$$\Leftrightarrow E(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{H(k_i)}{|\Omega|} \cdot k_i$$

$$E(X) = \frac{\sum_{i=0}^{n} H(k_i) \cdot k_i}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i=0}^{n} H(k_i) \cdot k_i$$

Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt weiterhin:

$$\mu = n \cdot p$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)k \\
P(X=k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
\Leftrightarrow \mu &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= 0 \cdot \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
\mu &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \quad k \mapsto k+1 \\
&= n \cdot p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} \quad \text{(siehe 10.4)} \\
&= n \cdot p \cdot (p + (1-p))^{n-1} \\
\Leftrightarrow \mu &= n \cdot p \quad \square
\end{aligned}$$

7.3.3 Varianz

Die Varianz ist in der statistischen Stochastik tatsächlich eine definierte Größe und soll ein Maß dafür sein, wie breit das Spektrum an Ergebnissen ist und wie sehr diese vom Erwartungswert abweichen. Intuitiv und rein logisch kann diese Größe nicht hergeleitet werden. Sie ist definiert als:

$$V(X) := \sum_{i=0}^{n} (E(X) - k_i)^2 \cdot P(X = k_i)$$

Übersetzt könnte man aus der Formel entnehmen, dass es sich bei der Differenz von Erwartungswert und tatsächlichem Ergebnis um eine Art Abstand handelt, der nach Quadrierung mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert wird. Somit ist die Varianz tatsächlich eine Art Maß für die Abweichung vom Erwartungswert.

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße lässt sich wiederum zeigen:

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{k=0}^{n} (\mu - k)^2 \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\mu^2 - 2\mu k + k^2) \cdot P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu^2 \cdot P(X = k) - \sum_{k=0}^{n} 2\mu k \cdot P(X = k) + \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X = k) \\
&= \mu^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} P(X = k)}_{1} - 2\mu \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)}_{\mu} + \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot P(X = k)
\end{aligned}$$

$$= -\mu^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{für } k = 0 \mapsto 0$$

$$= -\mu^2 + \sum_{k=1}^{n} k \cdot n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= -\mu^2 + \mu \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \qquad k \mapsto k+1$$

$$= -\mu^2 + \mu \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}$$

$$= -\mu^2 + \mu \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{(n-1)p} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k}}_{1} \right)$$

$$= \mu(1 + \mu - p) - \mu^2$$

$$= \mu(1-p) = n \cdot p \cdot (1-p) \quad \square$$

7.3.4 Standardabweichung

Die Standardabweichung steht in direkter Beziehung zur Varianz und soll ein Maß dafür sein, um wie viel die tatsächlichen Ergebnisse vom Erwartungswert durchschnittlich abweichen. Die Standardabweichung ist daher so definiert:

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (E(X) - k_i)^2 \cdot P(X = k_i)}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \Leftrightarrow \sigma^2 = V(X)$$

Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt deshalb:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

7.3.5 Normalverteilung

Betrachte man eine binomialverteilte Zufallsgröße X und stelle die Wahrscheinlichkeiten für die Werte k, die X annehmen kann, grafisch dar, so entstehen sogenannte Histogrammme (Abb. 7.4).

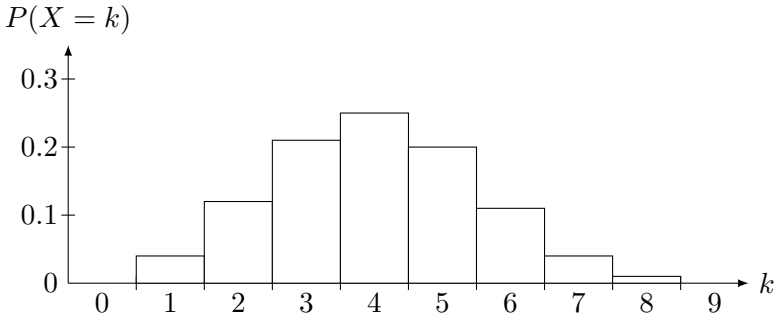


Abb. 7.4: Histogramm mit $n = 10$ und $p = 0.4$

Diese grafischen Darstellungen mögen schön anzusehen und für ausgewählte Zufallsversuche eventuell sogar nützlich sein, doch treten in der Realität selten nur ganzzahlige Ergebnisse beispielsweise bei Messreihen eines Experiments auf. Um reale Zufallsprozesse mathematisch abbilden zu können, benötigt man häufig eine allgemeinere Beschreibung der Verteilung einer Zufallsgröße, die die Ergebnismenge $\Omega \subset \mathbb{Z}$ auf den reellen Zahlenkörper erweitert. Allerdings müssen dann auch andere Dinge gefordert werden, wie z. B., dass die Anzahl n, wie oft das Experiment wiederholt wird, mindestens den Zahlenkörper umfasst, den die Ergebnismenge darstellt. Somit also: $n \to \infty$ (da $|\mathbb{R}| \to \infty$) bei gleichzeitiger Bedinung $p \to 0$, wenn p die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass ein konkretes Ergebnis eintritt. Dies muss gelten, da bei unendlich vielen Ergebnissen die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis immer klei-

ner werden muss, um zu garantieren, dass $\sum P(X = k) = 1$. Lässt man so etwas geschehen für eine Funktion $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, bei dem man entsprechend großes n sowie kleines p wählt, so könnte der Graph dieser Funktion (im relevanten Intervall) in etwa so aussehen:

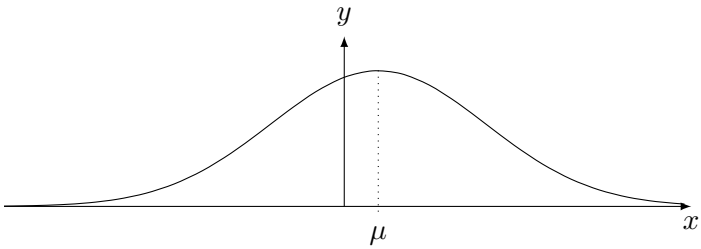


Abb. 7.5: Binomialverteilung approximiert Normalverteilung

Für die Funktionalanalysis ist eine Funktion, in deren Gleichung zwei nichtstetige Grenzwerte vorkommen, allerdings sehr lästig. Es braucht derweilen also eine Funktion, die die Verteilung einer solchen Zufallsgröße, die schon gar nicht mehr binomialverteilt genannt werden kann (spätestens, seitdem $\Omega \subset \mathbb{R}$), besser (damit gemeint sei vorteilhafter) beschreibt. Die Rede ist nun von sogenannten normalverteilten Zufallsgrößen. Für diese ist es wichtig, folgende axiomatische Definition zu erwähnen.

> *Eine Summe von sehr vielen unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz ist approximativ normalverteilt.*

Dies geht aus dem zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg und Lévy hervor.
Um jetzt aber eine Gleichung zu finden, die für die Beschreibung normalverteilter Zufallsgrößen nützliche Eigenschaften

hat, untersucht man die Eigenschaften unseres oben ausgedachten Graphen (Abb. 7.5) und stößt bei der Beantwortung der Fragen: "Wie wächst der Graph (Monotonieverhalten) und welchen Flächeninhalt hat er?" auf folgende bahnbrechende Proportionalität:

Unter der Annahme, dass alle zugehörigen Wahrscheinlichkeiten positiv sind, können wir hoffen, dass sich die relativen (wie absoluten) Häufigkeiten im Unendlichen auf einen Grenzwert von Null einpendeln, je weiter wir uns vom Erwartungswert entfernen.
Daher können wir verlangen, dass die Rate, mit der die Werte von f abnehmen, proportional zum Produkt aus der Entfernung vom Erwartungswert (Maximum) und dem Wert von f selbst ist. Eine Zufallsvariable, die einer Verteilung folgt, bei der dies zutrifft, wird als normalverteilt bezeichnet.

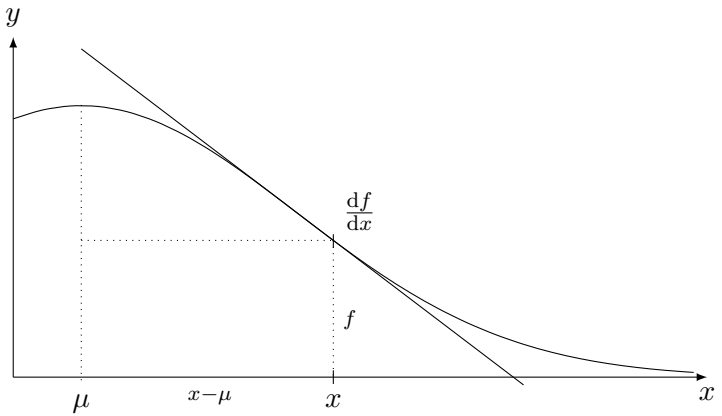


Abb. 7.6: Proportionalität der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -k(x-\mu)f$$

Unter Nutzung der Seperationsmethode gelangt man zu:

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -k(x-\mu)\ \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{f}\ \mathrm{d}f = -k \int (x-\mu)\ \mathrm{d}x$$

$$\ln|f| + C_1 = -k\frac{(x-\mu)^2}{2} + C_2$$

da $\forall x \in X : f(X) > 0$:

$$f = e^{-k\frac{(x-\mu)^2}{2}+C_3}$$

$$f(x) = Ce^{-\frac{1}{2}k(x-\mu)^2}$$

Damit wäre eine Funktion gefunden, die unseren Graphen abbildet. Allerdings müssen für die Beschreibung einer normalverteilten Zufallsgröße die Konstanten so gewählt werden, dass:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$$

Und so lösen wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\frac{1}{2}k(x-\mu)^2}\ \mathrm{d}x = 1$$

$$u^2 = \frac{1}{2}k(x-\mu)^2 \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}u\sqrt{\frac{2}{k}}$$

$$C\sqrt{\frac{2}{k}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u = 1$$

Betrachten wir nun zunächst allein das Integral. Es ist die berühmte Gauss'sche Glockenkurve, deren uneigentliches Integral, also die Fläche unter der Funktion, wir bestimmen

müssen. Um dies zu tun, gibt es mehrere Wege. Wir lösen das Integral, wie LAPLACE es getan hat.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad e^{-u^2} = e^{-(-u)^2} \\
&= 2\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\
I^2 &= 4\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \int_{0}^{\infty} e^{-v^2} dv \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2} e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \quad v = u\cdot t, \quad \mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u e^{-(u^2+(ut)^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u e^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u e^{-u^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&\text{Sei} \quad r = -u^2(1+t^2), \quad \mathrm{d}r = -2u(1+t^2)\,\mathrm{d}u \\
&= 4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{-\infty} u e^{r}\frac{\mathrm{d}r}{-2u(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{0}^{\infty} -\frac{1}{2(1+t^2)}\int_{0}^{-\infty} e^{r}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}t \\
&= 4\int_{0}^{\infty} -\frac{1}{2(1+t^2)}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0)\right] \\
&= 2\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \\
I^2 &= \pi
\end{aligned}
$$

$$\therefore I = \sqrt{\pi} \quad \square$$

Wir können nun also weiter verfahren:

$$C\sqrt{\frac{2}{k}}\sqrt{\pi} = 1$$

$$\Leftrightarrow C = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}$$

Damit ergibt sich:

$$f(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}k(x-\mu)^2}$$

Wählt man nun k so, dass:

$$k = \frac{1}{\sigma^2}$$

dann ergibt sich die standartisierte (”genullte”) Form der Normalverteilung:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad \square$$

Teil II

superiore mathematica - apocryphus

Kapitel 8

Logik

Wäre man so hirnrissig und würde nach Erhalt der allgemeinen Hochschulreife ernsthaft Mathematik studieren, so liegt die Möglichkeit nahe, von den ersten Vorlesungen völlig, aber auch völlig verwirrt zu sein. Es ist in der Tat so, dass die Mathematik in ihrem eigentlichen Wesen (ja, gemeint ist, dass die Mathematik der Schule etwas anderes ist) ein Gerüst aus Regeln und logischen Zusammenhängen darstellt, das in sich funktioniert. Mathematik ist keine Naturwissenschaft. Im Gegensatz zur Physik, Chemie, Biologie usw. basieren die Theorien der Mathematik nicht auf Beobachtungen, die eine mögliche, aber nie 100% -ig sichere These bestärken, sondern auf einer logischen Verknüpfung von Schlussfolgerungen, die eine Aussage beweisen können. Eine Aussage A ist:

> *...ein sprachliches Gebilde, dem man einen der Wahrheitswerte "wahr" ("trifft zu") oder "falsch" ("trifft nicht zu") zuordnen kann. Diese Zuordnung muss objektiv und zeitlos sein.*

Dabei ist wichtig zu erwähnen, dass der Wahrheitswert nicht bekannt oder gar überprüfbar sein muss, damit eine Aussage

als Aussage gilt. Es muss lediglich sinnvoll sein, nach diesem Wahrheitswert zu fragen. Die beiden Wahrheitswerte schließen sich gegenseitig aus.

In der Mathematik können Aussagen miteinander verknüpft werden. Aus diesen Verknüpfungen entstehen wiederum neue Aussagen, deren Wahrheitswert logische Schlussfolgerungen zulassen.

8.1 Aussagenlogik

8.1.1 Negation

Anstatt bei jeder logischen Überlegung einer Aussage A einen der Wahrheitswerte "wahr" oder "falsch" zuzuordnen, wird im Allgemeinen nur mit der Wahrheit einer Aussage argumentiert. Sollte die Aussage A falsch sein, so muss ihre Verneinung (Negation) automatisch wahr sein. Eine wahre korrespondierende Aussage A' (oder auch $\overline{A}$) ist die Negation der falschen Aussage A und wird notiert:

$$A' = \neg A$$

8.1.2 Konjunktion

Eine Konjunktion zweier Aussagen ist mit dem logischen "AND" der Mathematik gleichzusetzen. Sie ist nur dann wahr, wenn alle verknüpften Aussagen wahr sind. Zur symbolischen Notation nutzt man den Junktor $\wedge$.

Für die Konjunktion der Aussagen A und B notiert man:

$$A \wedge B$$

8.1.3 Disjunktion

Die Disjunktion hingegen ist eine Verknüpfung mehrerer Aussagen, die nur wahr ist, wenn mindestens eine der verknüpften Aussagen wahr ist. Deshalb wird sie auch als logisches "OR" der Mathematik bezeichnet. Das Symbol für diesen Junktor ist $\vee$.
Für die Disjunktion der Aussagen A und B notiert man:

$$A \vee B$$

Einen Sonderfall stellt die Kontravalenz dar. Für die Wahrheit dieser Verknüpfung darf nur eine der verknüpften Aussagen wahr sein. Sie ist mit dem logischen exklusiven Oder "XOR" zu vergleichen. Notiert wird dies mit:

$$A \dot{\vee} B \quad \text{oder} \quad A \oplus B$$

8.1.4 Implikation

Die Implikation in der Logik kann teilweise trügerisch sein. Sie bezeichnet die logische Schlussfolgerung an sich, führt aber oftmals zu Verwechslungen in ihrer Bedeutung geschuldet dem allgemeinen Sprachgebrauch. Konkret besteht eine Implikation aus zwei Aussagen A und B, die folgendermaßen miteinander verknüpft sind:

Wenn A wahr ist, dann ist B wahr.

Symbolisch notiert:

$$A \Rightarrow B$$

Oft auch gesprochen: "Aus A folgt B."

Es ist von immenser Bedeutung, dass dieser Satz im mathematischen Sinne nicht falsch verstanden wird. Die Schlussfolgerung des Wahrheitswerts von B aus dem Wahrheitswert von

A beruht in keinem Fall auf einem kausalen Zusammenhang (Ursache A führt zu Wirkung B) oder zeitlichen Ablauf (Erst A, dann B). Es ist einzig und allein die logische Abfolge gemeint. Weiterhin trifft diese Verknüpfung ausschließlich eine Aussage über den Wahrheitswert von B, basierend auf dem Wahrheitswert von A, ohne dabei etwas über A konkret auszusagen. Es ist zum Beispiel möglich, dass B wahr ist, obwohl A falsch ist. Das schließt die Implikation nicht aus. Die Implikation wäre nur dann falsch, wenn A wahr ist, B allerdings falsch.

Implikationen können deswegen auch nicht ohne Weiteres umgedreht werden. Nur weil die Implikation: "Wenn A wahr ist, dann ist B wahr" wahr ist, heißt das nicht, dass die Umkehrung: "Wenn B wahr ist, dann ist A wahr" auch wahr ist. Eine Umkehrung der Implikation erfordert immer auch eine Umkehrung der Wahrheitswerte. Wenn die Implikation: "Wenn A wahr ist, dann ist B wahr" wahr ist, dann ist die Umkehrung: "Wenn B nicht wahr ist, dann ist A nicht wahr" auch wahr.

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Warum diese beiden Implikationen logisch äquivalent sind, wird im Kapitel 8.1.5 bewiesen.

8.1.5 Wahrheitstafeln

Mit den vielen verschiedenen Verknüpfungen von Aussagen ist es nun sinnvoll, tabellarische Übersichten mit Fallunterscheidungen anzulegen. Diese Art von Logik findet vor allem viel Anwendung in der Informatik, weshalb hier direkt die Legende $1 = wahr$ und $0 = falsch$ verwendet werden soll. Es existieren zwei Aussagen A und B, die miteinander verknüpft werden:

$$\exists A, B :$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0

Tabelle 8.1

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg A \vee B$	$A \vee \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0

Tabelle 8.2

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \dot{\vee} B$	$\neg A \dot{\vee} B$	$A \dot{\vee} \neg B$	$\neg A \dot{\vee} \neg B$
0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1	0

Tabelle 8.3

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow \neg B$
0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1

Tabelle 8.4

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$B \Rightarrow A$	$\neg B \Rightarrow A$	$B \Rightarrow \neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1

Tabelle 8.5

Die logische Äquivalenz (siehe 8.1.6) ist aus den Wahrheitstafeln ablesbar, denn die Gleichwertigkeit einer logischen Aussage liegt dann vor, wenn in allen vier Fällen, die bei zwei verknüpften Aussagen eintreten können, die Verknüpfungen gleich wahr sind.

So sind zum Beispiel folgende Verknüpfungen äquivalent: (Referenz angegeben in: Tabelle - Spalte)

$(A \dot{\vee} B) \Leftrightarrow (\neg A \dot{\vee} \neg B)$ siehe 3 - 5 und 3 - 8
$(\neg A \dot{\vee} B) \Leftrightarrow (A \dot{\vee} \neg B)$ siehe 3 - 6 und 3 - 7
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ siehe 4 - 5 und 5 - 5
$(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ siehe 4 - 6 und 5 - 6
$(A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow \neg A)$ siehe 4 - 7 und 5 - 7
$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$ siehe 4 - 8 und 5 - 8

Aus weiteren Überlegungen geht hervor:

$(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ siehe 1 - 5 und 2 - 8
$(\neg A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(A \vee \neg B)$ siehe 1 - 6 und 2 - 7
$(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$ siehe 1 - 7 und 2 - 6
$(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \vee B)$ siehe 1 - 8 und 2 - 5

da alle negierten Aussagen dann wahr sind, wenn die zu negierende Aussage falsch ist.

8.1.6 Äquivalenz

Eine Äquivalenz liegt dann vor, wenn zwei (oder mehrere) Implikationen bzw. Aussagen logisch gleichwertig sind, sie also im logischen Sinne das Gleiche bedeuten. Sind A und B äquivalent, dann gilt:

B ist genau dann wahr, wenn A wahr ist.

$$A \Leftrightarrow B$$

Liegt eine Äquivalenz vor, dann werden folgende Dinge impliziert:

$$(A \Rightarrow B) \quad \wedge \quad (B \Rightarrow A) \quad \wedge \quad (\neg A \Rightarrow \neg B) \quad \wedge \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

8.1.7 Priorität

Logische Aussagen, die mehr als eine Verknüpfung enthalten, werden mit folgender Priorität gelesen (von höchster zu niedrigster Priorität):

$$(), \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$$

Ähnlich der "Punkt-vor-Strich"-Regel in der Arithmetik bedeuten diese beiden Aussagen also das gleiche:

$$\neg A \wedge B \vee C \Rightarrow D \Leftrightarrow E = ((((\neg A) \wedge B) \vee C) \Rightarrow D) \Leftrightarrow E$$

8.2 Prädikatenlogik

Oftmals (realistisch gesehen, sogar meistens) enthalten mathematische Aussagen Variablen. Einer Aussage kann man jedoch nur einen Wahrheitswert zuordnen, wenn sie objektiv und zeitlich unveränderlich ist. Schließlich könnte die Variable verschiedene Werte annehmen, die zu unterschiedlichen

Wahrheitswerten führen. Eine solche variablenabhängige Aussage $A(x)$ nennt man Aussageform. Eine Aussageform $A(x)$ ist die Abstraktion oder Verallgemeinerung einer Aussage A. Zur Veranschaulichung:

Aussage A	Aussageform $A(x)$
"3 ist eine positive natürliche Zahl und darüber hinaus eine Primzahl."	"x ist eine positive natürliche Zahl und darüber hinaus eine Primzahl."
$3 > 0 \wedge 3 \in \mathbb{N} \wedge 3 \in \mathbb{P}$	$x > 0 \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{P}$
$\Rightarrow$wahr	$\Rightarrow$?wahr oder falsch?

Es ist auch möglich, dass eine Aussageform mehrere Variablen enthält. So wäre die Aussage $A(m, n, k)$ von m, n und k abhängig. Dennoch existieren auch Aussageformen, denen man Wahrheitswerte unabhängig von konkreten Werten zuordnen kann. Entweder, weil sie für alle Werte, die die Variable annehmen könnte, den gleichen Wahrheitswert hat, oder weil sie für bestimmte x den gleichen Wahrheitswert hat. Es bedarf also nur einer Einschränkung, einer Quantifizierung, der Variable(n).
Dies ist mithilfe sogenannter Quantoren möglich, von denen es im Wesentlichen zwei gibt.

8.2.1 Allquantor

Der Allquantor $\forall$ wird gelesen "für alle" und bestimmt, dass die nachfolgende Aussage (eigentlich Aussageform) wahr ist für alle Werte, die die Variable annehmen kann. Zum Beispiel:

"Für alle x ist das Produkt aus sich selbst größer oder gleich als Null."

$$\forall x \ (x \cdot x \geq 0)$$

Dabei ist es auch möglich, zu differenzieren, welche Werte "alle" x annehmen können, durch Zuordnung in eine Menge oder Qualifizierung der Größe oder Ausschließen bestimmter Werte. Zum Beispiel:

"Für alle natürlichen x lässt sich x als Produkt aus Primzahlen darstellen."

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (x = \prod_{i=1}^{n} p_i,\ p_i \in \mathbb{P})$$

oder

"Für alle positiven x ist die Wurzel aus x eine reelle Zahl."

$$\forall x > 0\ (\sqrt{x} = r,\ r \in \mathbb{R})$$

Schließlich können manche Aussageformen auch für alle Werte ihrer Variable(n) falsch sein, wodurch wiederum ihre Negation für alle x wahr ist.

"Für alle x ist x nicht x+1."

$$\forall x\ \neg(x + 1 = x)$$

8.2.2 Existenzquantor

Noch allgemeiner ermöglicht der Existenzquantor $\exists$ die Wahrheit einer Aussageform, denn er behauptet lediglich, dass es mindestens ein x gibt, dass diese Aussage erfüllt, ohne dabei nennen zu müssen, welches diese(s) x wäre(n). So beispielsweise:

"Es existiert ein x, sodass das Produkt aus sich selbst Null ergibt."

$$\exists x\ (x \cdot x = 0)$$

Auch hier sind Qualifizierungen möglich, zum Beispiel:

"Es existiert ein imaginäres x, sodass das Produkt aus sich selbst -1 ist."

$$\exists x \in \mathbb{C} \ (x \cdot x = -1)$$

Genauso wahr wäre die Aussage ohne die Einordnung von x in die Menge der komplexen Zahlen, nur für die Argumentation ist eine Qualifizierung, vor allem bei Beweisen, von Bedeutung. Auch mit dem Existenzquantor lässt sich die Unwahrheit einer Aussage mithilfe ihrer Negation ausdrücken. Die Negation in Verbindung zum Allquantor ist logisch äquivalent der zum Existenzquantor.

"Es existiert kein x, sodass x gleich $x + 1$ ist."

$$\neg\exists x \ (x = x + 1) \Leftrightarrow \forall x \ \neg(x + 1 = x)$$

Wichtig zu erwähnen ist außerdem, dass für Aussagen- wie auch Prädikatenlogik in der Fachliteratur unterschiedliche Schreibweisen existieren, die alle gleichermaßen berechtigt sind. So schreibt man beispielsweise für "Es existiert kein" auch $\nexists$ oder für "Es existiert genau ein" $\exists!$. Es gibt auch unterschiedliche Schreibweisen für die Verbindung von Quantor und Aussage. Bedeutungsgleich sind also auch:

$$\forall x \ (A(x)) \Leftrightarrow \forall x : A(x)$$

Kapitel 9

Mengenlehre

Obwohl die Mengenlehre auf den ersten Blick eine vergleichsweise primitive Disziplin der Mathematik zu sein scheint, ist sie doch eine der jüngsten als auch am wenigsten erforschten Fachgebiete. Erst im späten 19. Jahrhundert befasste sich Georg Cantor mit der Beschaffenheit von Gruppierungen aus Dingen, sowohl realen als auch abstrakten, imaginäre Objekten. Dabei formulierte er das erste Mal eine Definition des Begriffs Menge:

> *"Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."*

Lange Zeit bleiben seine Forschungen führend. Cantor entdeckte im Zuge dessen auch die Verschiedenheit der Unendlichkeit. Seine wichtigste Erkenntnis: Nicht jede unendliche Menge ist gleichmächtig (gleich groß). Deshalb unterscheidet er vor allem unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit.

> *Zwei unendliche Mengen seien gleichmächtig, wenn sie bijektiv aufeinander abbildbar sind.*

Das bedeutet, dass jedem Element aus der einen Menge eineindeutig ein Element aus der anderen Menge zugeordnet werden kann. Es herrscht sozusagen eine eins-zu-eins Beziehung zwischen den Mengen. Später klassifiziert er Mengen in "abzählbar" und "überabzählbar". Abzählbare Mengen sind alle Mengen die den natürlichen Zahlen gleichmächtig sind, alle anderen seien überabzählbar. Es gibt keine unendliche Menge, die weniger mächtig als die, der natürlichen Zahlen ist.

Im darauf folgenden Jahrhundert bemerkte man, dass die Mengenlehre für andere Teile der Mathematik immer unabdingbarer wurde. Problematisch waren nur die Widersprüchlichkeiten, die sich aus Teilen von Cantors Forschungen ergaben. Einige Mathematiker versuchten nun andere Systeme zu finden, um damit die Mathematik der Mengen zu beschreiben, doch allein dies zu verstehen, benötigt ein Mathematik-Studium.

9.1 Notationen

Es haben sich im Wesentlichen zwei Arten durchgesetzt, wie man Mengen chiffriert.

9.1.1 Aufzählende Notation

Bei einer recht übersichtlichen Menge können ihre Elemente in geschweiften Klammern einfach aufgezählt werden. Seien alle Elemente x_1 bis x_n in M, so schreibt man:

$$M = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$$

Ein Objekt a ist genau dann ein Element von M, wenn es Eins der Elemente x_1 bis x_n ist. Ist ein Objekt a ein Element

von M, so kennzeichnet man dies mit dem $\in$ -Symbol. Die folgenden Aussagen sind also logisch äquivalent:

$$a \in \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \Leftrightarrow a = x_1 \vee a = x_2 \vee a = x_3 \vee ... \vee a = x_n$$

9.1.2 Beschreibende Notation

Umfassen Mengen Elemente, die alle durch eine gemeinsame Eigenschaft gekennzeichnet sind, so können diese mithilfe sogenannter Prädikate (siehe Prädikatenlogik 8.2) beschrieben werden.
So enthält die Menge M alle x, auf die das Prädikat $P(x)$ zutrifft:

$$M = \{x \mid P(x)\}$$

Genauso ist ein Objekt a dann ein Element der Menge M, wenn auf a das Prädikat zutrifft, also $P(a)$ wahr ist:

$$a \in \{x \mid P(x)\} \Leftrightarrow P(a)$$

Überdies gibt diese Schreibweise die Möglichkeit, Mengen zu definieren, die Teil einer größeren Übermenge und zusätzlich durch ein weiteres Prädikat ausgezeichnet sind. In diesem Fall wäre ein Objekt a also dann ein Objekt von M, wenn es in der Menge N enthalten ist UND das Prädikat $P(x)$ erfüllt:

$$a \in \{x \in N \mid P(x)\} \Leftrightarrow a \in N \wedge P(a)$$

9.1.3 Mächtigkeit und Kardinalität

Die Mächtigkeit oder Kardinalität $|M|$ oder $\#M$ einer Menge M bezeichnet in der Mengenlehre die Anzahl ihrer Elemente, insofern M endlich ist. Somit heißt eine Menge endlich, wenn sie gleichmächtig zu einer natürlichen Zahl ist. Zwei Mengen heißen überdies gleichmächtig, wenn sie bijektiv aufeinander

abbildbar sind (siehe 9.3.3). Wenn $|M| = n,\ n \in \mathbb{N}$, dann wird n auch als *Kardinalzahl* von M bezeichnet.

9.2 Besondere Mengen

9.2.1 Teilmenge

Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist:

$$A \subset B \ \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Eine Menge A heißt echte Teilmenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist und umgekehrt:

$$A \subseteq B \ \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

9.2.2 Obermenge

Eine Menge B heißt Obermenge von A, wenn A eine Teilmenge von B ist.

$$B \supset A \Leftrightarrow A \subset B$$

9.2.3 Leere Menge

Eine Menge A heißt leere Menge, wenn sie kein Element enthält. Sie wird entweder mit dem $\emptyset$-Symbol oder einer leeren Klammer $\{\}$ notiert.

$$A = \{\} = \emptyset \Leftrightarrow \forall x : \neg(x \in A)$$

Bei genauer Überlegung fällt zudem auf, dass die leere Menge einzigartig ist. Damit ist nicht gemeint, dass die leere Menge besonders toll, sondern eben die einzige, *die eine*, leere Menge ist. Jede leere Menge kann nicht von anderen leeren Mengen

unterschieden werden.

Es ist zudem möglich, ausschließlich mithilfe der leeren Menge eine Mengendarstellung der natürlichen Zahlen vorzunehmen. John von Neumann definierte die natürlichen Zahlen über die Kardinalität von Mengen aus leeren Mengen.

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= \{\emptyset\} \\ 2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

9.2.4 Schnittmenge

Eine Schnittmenge von Mengen enthält alle die Elemente, die in allen von diesen Mengen enthalten sind. Oftmals bezeichnet man die Schnittmenge auch als *Durchschnittsmenge*. Die Schnittmenge über eine Menge von Mengen wird mit dem $\bigcap$-Zeichen symbolisiert. Die Schreibweise ist nun etwas komplizierter, da das Ausgedrückte eine umständliche, möglicherweise kontraintuitive und damit typisch mathematische Art ist, das Gemeinte zu beschreiben.
Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen (das bedeutet, dass alle Elemente von $\mathcal{A}$ selbst Mengen sind), X eine beliebige Menge aus $\mathcal{A}$ und x ein Element dieser Menge X:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid \ \forall X \in \mathcal{A},\ x \in X\}$$

Mit diesem Ausdruck ist gemeint, dass die Schnittmenge von $\mathcal{A}$ alle x enthält, für die das Prädikat gilt: Für alle Mengen X, die Element von $\mathcal{A}$ sind, ist x ein Element in allen X. Es ist also nur eine verkürzte Art zu schreiben:

$$\mathcal{A} = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_i\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid x \in X_1 \wedge x \in X_2 \wedge x \in X_3 \wedge ... \wedge X_n\}$$

Für die Schnittmenge über zwei Mengen (und wenige weitere) A und B ist auch die Schreibweise $A \cap B$ möglich und üblich.

$$A \cap B \Leftrightarrow \bigcap \{A, B\}$$

9.2.5 Vereinigungsmenge

Die Vereinigungsmenge von Mengen hingegen enthält alle Elemente, die in mindestens einer dieser Mengen enthalten sind. Man kann die Vereinigungsmenge auch als "Zusammenfassung" aller Elemente der Mengen verstehen. Das Zeichen für die Vereinigung über eine Menge von Mengen ist $\bigcup$. In der formalen Definition unterscheiden sich Schnittmenge und Vereinigungsmenge lediglich durch den Quantor im Prädikat. Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Mengen, X eine beliebige Menge aus $\mathcal{A}$ und x ein Element dieser Menge X:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x \mid \exists X \in \mathcal{A},\ x \in X\}$$

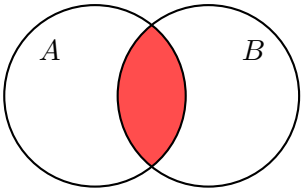
Wieder einmal ist dies die verkürzte Schreibweise für den Ausdruck: Die Vereinigungsmenge über $\mathcal{A}$ enthält alle x, für die das Prädikat $P(x) =$ "Es existiert eine Menge X in $\mathcal{A}$, in dem x ein Element von X ist." gilt.

$$\mathcal{A} = \{X_1, X_2, X_3, ..., X_i\}$$

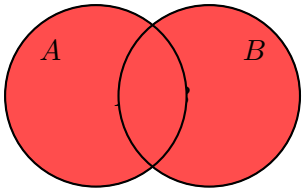
$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \mid x \in X_1 \vee x \in X_2 \vee x \in X_3 \vee ... \vee X_n\}$$

Für wenige Mengen ist auch hier möglich und üblich zu schreiben:

$$A \cup B \Leftrightarrow \bigcup \{A, B\}$$



$A \cap B$



$A \cup B$

9.2.6 Differenz und Komplement

Mit der Differenz zweier Mengen ist im mathematischen Sinne der Teil einer Menge gemeint, der übrig bleibt, wenn man die Schnittmenge von einer der Mengen abziehen würde. Man kann sich auch vorstellen, dass es sich bei der Differenzmenge von A und B um die Menge an Elementen handelt, die in der einen, aber nicht in der anderen Menge enthalten sind. Es ist wie in der Arithmetik von Bedeutung, ob von der Differenzmenge $A \backslash B$ oder von der Differenzmenge $B \backslash A$ die Rede ist.

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} \nLeftrightarrow B \backslash A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}$$

Die Differenzmenge von A in Bezug auf B $(A \backslash B)$ ist im sogenannten *Komplement* $B^{\complement}$ von B enthalten. Die Komplementärmenge $B^{\complement}$ enthält alle Elemente, die nicht Elemente in B sind:

$$B^{\complement} = \{x \mid x \notin B\}$$

Daraus folgt:

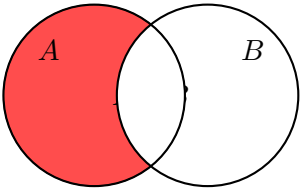
$$A \backslash B = A \cup B^{\complement}$$

9.2.7 Symmetrische Differenz

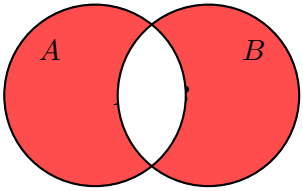
Die symmetrische Differenz ist weniger ein Sonderfall als eine Erweiterung der Differenzmenge zweier Mengen. Zu ihr gehören alle Elemente, die in A aber nicht in B sowie in B aber nicht in A enthalten sind. Daraus folgt, dass die symmentrische Differenz das Komplement der Schnittmenge von A und B ist.

$$A \triangle B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \Leftrightarrow A \backslash B \cup B \backslash A$$

$$A \triangle B \Leftrightarrow (A \cap B)^{\complement}$$



$A \backslash B$



$A \triangle B$

9.2.8 Potenzmenge

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M wird Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M genannt. Wie auch bei der Menge $\mathcal{A}$ in Kapitel 9.2.4 und 9.2.5 ist $\mathcal{P}(M)$ eine Menge von Mengen, ihre Elemente sind also selbst Mengen, die Elemente besitzen.
In diesem besonderen Fall eben alle Teilmengen, die aus den Elementen von M gebildet werden können. Folgende zwei Eigenschaften gelten in Bezug auf die Potenzmenge grundlegend:

1. Die Mächtigkeit von $\mathcal{P}(M)$ ist stets größer als die Mächtigkeit von M:
   $|M| < |\mathcal{P}(M)|$

2. Bei endlichen Mengen M beträgt die Mächtigkeit der Potenzmenge $2^{|M|}$:
   $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Beweis: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Man betrachte eine Menge M mit n Elementen $|M| = n$
I. Induktionsbeginn $n = 0$:

$$M = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\{\}\} \Rightarrow |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$$

II). Induktionsschluss $n \mapsto n + 1$:

$$M_{n+1} = \{1; 2; 3; ...; n + 1\}, \quad M_n \subset M_{n+1}$$

$$\Rightarrow M_{n+1} = \{M_n; n + 1\}$$

$$\mathcal{P}(M_n) = A_n = \{e(1); e(2); ...; e(2^n)\}, \quad A_n \subset A_{n+1}$$

$$\Rightarrow A_{n+1}$$

$$= \{A_n; \underbrace{\{e(1); e(2^{n+1})\}; \{e(2); e(2^{n+1})\}; ...; \{e(2^n); e(2^{n+1})\}}_{Y_{n+1}}\}$$

$$|A_{n+1}| = |A_n| + |Y_{n+1}| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$

Für unendliche Mengen M gilt nach CANTOR, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ die nächst größere Mächtigkeit besitzt (siehe Einführung Kap. 9).

9.3 Verknüpfungen von Mengen

9.3.1 Geordnetes Paar

Mengen sind in sich ungeordnet. Die Reihenfolge, in denen Elemente vorkommen, ist für das Wesen einer Menge vorerst unentscheidend. Hier bringt Guiseppe Peano Ende des 19. Jahrhunderts das erste Mal den Begriff des geordneten Paares ins Spiel. Ein geoordnetes Paar (a, b) ist die Zusammenfassung zweier Objekte a und b zu einer mathematischen Einheit, in der es (im Gegensatz zur Menge $\{a, b\}$) von Bedeutung ist, in welcher Reihenfolge sie vorkommen. Geordnete Paare (oft auch *Tupel* genannt) unterscheiden sich von zweielementigen Mengen durch ihre Anordnung:

$$(a, b) \nLeftrightarrow (b, a) \Rightarrow\!\!\!\!\!\!\not\Leftarrow \{a, b\} \Leftrightarrow \{b, a\}$$

Peanos Paaraxiom definiert genau, wann eine Gleichheit von geordneten Paaren möglich ist.

> *Zwei geordnete Paare gelten genau dann als gleich, wenn sowohl ihre ersten als auch ihre zweiten Komponenten gleich sind.*

$$(a, b) = (b, a) \Rightarrow a = b$$

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$$

Die gängigste Darstellung von geordneten Paaren mithilfe einer Mengeninterpretation ist die nach Kuratowski:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Das geornete Tupel (a, b) ist also eine Menge aus zwei Mengen, wobei das gemeinsame Element in beiden Mengen als die erste Komponente des geordneten Paares festgesetzt wird.

9.3.2 Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B, oft auch als *Produktmenge* $A \times B$ bezeichnet, ist definiert als die Menge aller Tupel (a, b), die aus den Mengen A und B gebildet werden können, sodass a aus A und b aus B ist:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Das kartesische Produkt bildet als Obermenge die Grundlage aller Relationen zwischen zwei Mengen A und B.

9.3.3 Relation und Funktion

Der Begriff Relation (lat. *relatio* - "Beziehung", "Verhältnis"), bezeichnet die systematische Bildung geordneter Paare, im Prinzip also das Muster, nach dem die Tupel aus zwei Mengen oder einer Menge mit sich selbst gebildet werden. Eine Relation R zwischen zwei Mengen A und B ist Teilmenge der Produktmenge:

$$R \subset A \times B$$

Wendet man eine Relation R auf zwei oder mehreren Mengen M_i an, so gelten diese als "miteinander verknüpft". Je nach Anzahl der Elemente innerhalb eines Relationsobjektes, gilt die Relation als binär (Geordnetes Paar), tertiär (Geordnetes Tripel), usw.
Erfüllt ein beliebiges Tupel (a, b) aus $A \times B$ mit $a \in A \wedge b \in B$ die Relationseigenschaft R, so ist es in R *enthalten*. Typischerweise werden Relationen als Bindeelement zwischen den zwei Elementen notiert.

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in R$$

Eine Relation heißt:

- injektiv, wenn jedes Element aus B höchstens einen Partner aus A hat.
  $\forall a, c \in A \; \forall b \in B : (a, b) \in R \wedge (c, b) \in R \Rightarrow a = c$

- surjektiv, wenn jedes Element aus B mindestens einen Partner aus A hat.
  $\forall b \in B \; \exists a \in A : (a, b) \in R$

- bijektiv, wenn jedes Element aus B exakt einen Partner aus A hat. Somit sind bijektive Relationen sowohl surjektiv als auch injektiv.
  $\forall b \in B \; \exists! a \in A : (a, b) \in R$

- transitiv, wenn aus den Relationen aRb und bRc die Relation aRc folgt.
  $\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

- reflexiv, wenn jedes Element auch zu sich selbst in Relation steht.
  $\forall a \in A : (a, a) \in R$

- symmetrisch, wenn die Relation ungerichtet ist, sodass immer auch die Umkehrung des geordneten Paares in der Relation enthalten ist.
  $\forall a \in A \; \forall b \in B : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

Beispielsweise ist die Relation $\leq$ auf die Menge $\{1, 3, 4\}$ transitiv und reflexiv, da:

$$\leq = \{(1,1), (1,3), (1,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

$$(1,3) \in \leq \wedge (3,4) \in \leq \Rightarrow (1,4) \in \leq$$

$$(1,1) \in \leq \wedge (3,3) \in \leq \wedge (4,4) \in \leq$$

Der Begriff der Funktion hat seinen Ursprung in der Mengenlehre und stellt eine besondere Art der Relation dar. Jede

rechtseindeutige Relation ist eine partielle, jede überdies definale Relation eine totale Funktion. Rechtseindeutig meint, dass jedes Element aus A höchstens einen Partner in B hat, definal meint, dass jedes Element aus A mindestens einen Partner in B hat. Somit gilt für jede Funktion f:

$$\forall x \in X \; \forall y, z \in Y : (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$$

(und für totale Funktionen darüber hinaus:)

$$\forall x \in X \; \exists y \in Y : (x, y) \in f \Leftrightarrow \forall x \in X \; \exists! y \in Y : (x, y) \in f$$

Die wesentlich verbreitetere Schreibweise ist nun:

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow xfy \Leftrightarrow f(x) = y$$

9.4 Gesetzmäßigkeiten

In der Algebra, Arithmetik und weiteren Teilgebieten der Mathematik, kurz gesagt, überall dort, wo Verknüpfungen wie Rechenoperationen usw. durchgeführt werden, tauchen immerzu erneut die gleichen Gesetzmäßigkeiten auf. Drei davon charakterisieren die Mathematik ganz besonders:

9.4.1 Kommutativgesetz

Kommutativität ist die Eigenschaft einer Verknüpfung, die im ähnlichen Sinn die Symmetrie einer Relation bezeichnet. Ist eine binäre Verknüpfung V kommutativ, so gilt:

$$\forall a, b \in A, \; V \in A \times A : \; aVb = bVa$$

Die Reihenfolge, in der zwei Objekte miteinander verknüpft werden, ist also bedeutungslos für das Ergebnis.

9.4.2 Assoziativgesetz

Die Assoziativität einer Verknüpfung bezeichnet ebenfalls die Irrelevanz der Reihenfolge, allerdings nicht in Bezug auf mehrere Objekte, die mit der gleichen Verknüpfung verknüpft werden. Beim Assoziativgesetz geht es insbesondere um die Klammersetzung, welche Verknüpfung also Priorität hat. Ist eine Verknüpfung assoziativ, so können die Klammern beliebig gesetzt werden.
Die formale Definition lautet: Eine binäre Verknüpfung V auf die Menge A heißt assoziativ, wenn:

$$\forall a, b, c \in A : V \subset A \times A, (aVb)Vc = aV(bVc)$$

9.4.3 Distributivgesetz

Distributivität als letzte der drei besonderen Eigenarten von Verknüpfungen bezeichnet das besondere Verhältnis von zwei verschiedenen Verknüpfungen V und W, die

- linksdistributiv über V sein können, wenn gilt:
  $\forall a, b, c \in V, W;\ V, W \in A \times A :\ aV(bWc) = (aVb)W(aVc)$
- rechtsdistributiv über V sein können, wenn gilt:
  $\forall a, b, c \in V, W;\ V, W \in A \times A :\ (bWc)Va = (aVb)W(aVc)$
- distributiv über V, wenn V rechts- und linksdistributiv ist.

Beispielsweise sind die algebraischen Operationen "Addition" und "Mulitplikation" kommutativ sowie assoziativ. "Multiplikation" ist darüber hinaus auch zur Addition distributiv, Division hingegen nur rechtsdistributiv. Es folgen die klassischen Gesetze, die axiomatisch vorausgesetzt werden:

Addition:

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Multiplikation:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot (b \pm c) = (a \cdot b) \pm (a \cdot c)$$

Division:

$$(a \pm b) : c = (a : c) \pm (b : c)$$

Für die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$ soll nun bewiesen werden, dass diese distributiv sind.

Fall I:
Sei $A, B, C \subset M$: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in [A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \square$$

Fall II:
Sei $A, B, C \subset M$: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)] \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$$

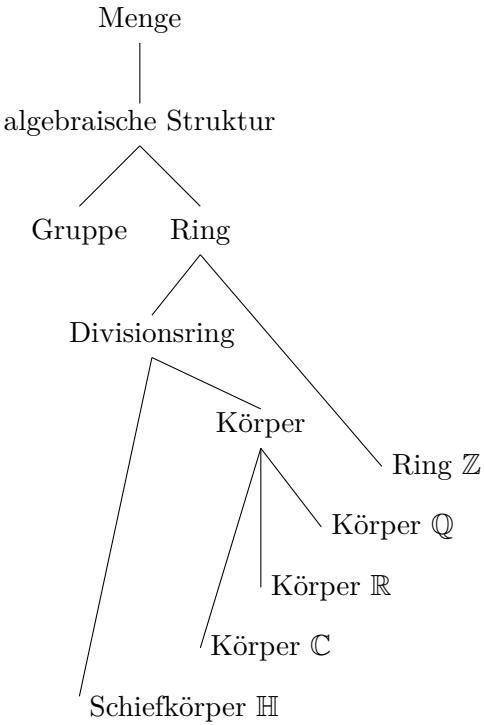
$$\Rightarrow A \subset (A \cup B),\ A \subset (A \cap C) \Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C) \quad \square$$

9.5 Algebraische Strukturen

Bereits CANTOR stieß auf die Erkenntnis, dass Mächtigkeiten nicht die einzige Art sein könne, Mengen voneinander zu unterscheiden. Es zeigen sich strukturelle Unterschiede, wie die Elemente miteinander zusammenhängen und so entsteht nach und nach ein Netz aus Verbindungen und Untergruppe, die solche Algebraische Strukturen zusammenfasst:

9.5.1 Klassifizierung



Eine präzise mathematische Unterscheidung dieser Strukturen ist für den Rahmen dieser Arbeit nicht möglich. Dennoch sollen hier zumindest stichpunktartig Charakterisierungen vorgenommen werden.

Algebraische Gruppe

... ist jede Menge, in der eine binäre Verknüpfung vollständig existiert.

Algebraischer Ring

... ist jede Menge, in der zwei binäre Verknüpfungen vollständig existieren.

Divisionsring/Schiefkörper

... ist jeder algebraische Ring, bei dem für alle Elemente jeweils multiplikative Inverse existieren.

Körper

... ist jeder Divisionsring, bei dem die Multiplikation kommutativ ist.

Kapitel 10

Reihen und Summen

Für Summen endlich oder unendlich vieler Glieder ist in der Analysis die rekursive Darstellung von Summen mithilfe des Summationsoperator $\sum$ sehr weit verbreitet:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n$$

i ist dabei die Laufvariable (oder Summationsindex), der ein Startindex m zugeordnet wird. n beschreibt die Summationsobergrenze. Die Variablen m, n sind stets entweder ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ oder (bei sog. unendlichen Summen) die unendlichen Elemente $\pm\infty$ (meist ∞ als obere Grenze). i nimmt im ersten Schleifendurchlauf den Wert von m an und erhöht ihn in jedem weiteren Durchlauf schrittweise um eine Einheit bis n schließlich erreicht wurde. Während des Summationsprozesses gilt also stets $m \leq i \leq n$. In jedem Durchlauf wird die Bildungsvorschrift a_i in Abhängigkeit von i für das zur Zeit vorherrschende i berechnet und die Summe jedes dieser Teilergebnisse ergibt das Ergebnis der Summe. Abb. 10.1 zeigt die Funktion der Summe in der Programmierung.

```
1  public class Math {
2
3      // programmatische Inizialisierung
4      public static void main(String[] args) {
5          new Math();
6      }
7
8      public Math() {
9          System.out.println("Ergebnis der Summe: "
10             + calcSum());
11     }
12
13     // Summenfunktion
14     public int calcSum() {
15         int sum = 0;
16         for(int i = 0; i<=10; i++) {
17             sum += i*i;
18         }
19         return sum;
20     }
21
22 }
```

Abb. 10.1: Funktion der Summe $\sum_{i=0}^{10} i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = 385$ in Java

10.1 Konvergenzkritirium

Läuft die Summe bis $\pm\infty$ gibt es zwei Möglichkeiten der Entwicklung. Entweder nähert sie sich einer bestimmten Zahl z an (sie konvergiert gegen z)

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=m}^{n} a_i = z, \quad z \in \mathbb{R}$$

oder ihr Wert divergiert gegen $\pm\infty$.

Ein Beispiel einer konvergenten Reihe ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

10.2 Rechenregeln für Summen

Summe gleicher Summanden:
Eine Summe, deren Bildungsvorschrift nicht von der Laufvariable abhängt, hat immer gleiche Summanden. Bei folgender Summe wird x n-mal aufsummiert:

$$\sum_{i=1}^{n} x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\text{-mal}} = nx$$

Konstanter Faktor:
Eine Summe, die aus einem konstanten Faktor c multipliziert mit einer Bildungsvorschrift a_i besteht, kann nach dem Distributivgesetz folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n \\ &= c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \\ &= c\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

Summe mit mehreren Bildungsvorschriften:
Eine Summe, die aus einer Summe von Bildungsvorschriften besteht, kann nach dem Assoziativgesetz in die Summe beider

einzelner Summen umgeformt werden. Dies funktioniert auch umgekehrt: Mehrere Summen, die über das gleiche Intervall und der gleichen Variable laufen, können zu einer großen Summe zusammengefasst werden. Dieses Gesetz gilt nicht, wenn die Bildungsvorschriften multiplikativ verknüpft sind.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) &= \underbrace{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)}_{n\text{-mal}} \\ &= \underbrace{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}_{n\text{-mal}}+\underbrace{(b_1+b_2+\ldots+b_n)}_{n\text{-mal}} \\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i\end{aligned}$$

Ein Beispiel, das die ersten Regeln zusammenfasst:

$$\sum_{i=1}^{n}(xa_i+yb_i+z) = x\sum_{i=1}^{n}a_i+y\sum_{i=1}^{n}b_i+nz$$

Aufspalten einer Summe: Er erweist sich manchmal als sinnvoll, eine Summe in mehrere Summen aufzuspalten:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = \sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{i=m+1}^{n}a_i \quad \text{mit} \quad m<n$$

Einzelne Summanden können auch explizit von der Summe getrennt werden:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i = a_m+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}a_i$$

Doppelsummen:
Eine Doppelsumme ist die Summe einer Summe und

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{m} a_{ij} := & \, a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1m} \\ & + a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2m} \\ & \quad \vdots \\ & + a_{n1} + a_{n2} + \ldots + a_{nm}\end{aligned}$$

definiert. Eine mögliche Interpretation ist die Doppelsumme als Summierung jedes Elements einer $n \times m$ Matrix. Dabei gilt das Kommutativgesetz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

10.3 Taylorreihen

Eine TAYLORreihe T wird in der Anaysis verwedet, um eine glatte Funktion - eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, die beliebig oft differenzierbar ist - durch eine Potenzreihe darzustellen. Solche Reihen sind bedeutsam, weil abstrakte Funktionen wie die Sinusfunktion als unendliche Summen ausgedrückt werden können und plötzlich eine Vielzahl weiterer Rechenoperationen mit ihnen durchgeführt werden können. Der Punkt, ab dem die TAYLORreihe beginnt, nennt sich Entwicklungsstelle $x_0 \in X$. T von $f(x)$ an x_0:

$$\mathrm{T}f(x, x_0) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x_0^n} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

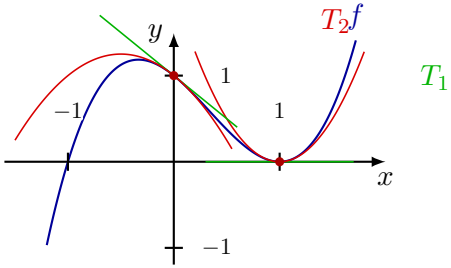


Abb. 10.2: TAYLORreihenentwicklung einer beliebigen Funktion

$\frac{\mathrm{d}^n f(x_0)}{\mathrm{d}x^n}$ beschreibt hierbei die n-te Anleitung von f an der Stelle x_0. Ist die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ der Ursprung der TAYLORreihe, stellt sie eine Sonderform dar und nennt sich MACLAURINreihe. Sie wird folgendermaßen vereinfacht:

$$\mathrm{T}f(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}(0)^n} \frac{x^n}{n!}$$

10.3.1 Taylorreihe der Sinusfunktion

Für die Sinusfunktion der Stelle $x_0 = 0$ gilt folgende TAYLORreihe:

$$\mathrm{T}(\sin(x))(x,0) = \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

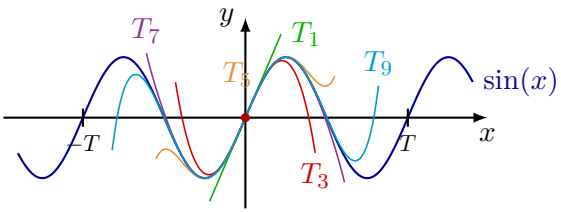


Abb. 10.3: Visualisierung der ersten n-gradigen Polynome (T_1 bis T_9) bzw. Potenzreihen der TAYLORreihe für die Sinusfunktion

Beweis: Sei $f(x) = \sin(x)$. Es ist:

$$\mathrm{T}f(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}} f}{\mathrm{d}(0)^n} \frac{x^n}{n!}$$

Die ersten Ableitungen von f nach x lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= -\sin(x) = \sin(x + \pi) \\
\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} &= -\cos(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} &= \sin(x) = \sin(x + 2\pi)
\end{aligned}$$

Nachdem die vierte Ableitung von f erneut f ist, lässt sich die Behauptung aufstellen, dass sich jede Ableitung von f alle vier Ableitungen gleicht, was sich durch vollständige Induktion beweisen lässt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= 1 \cdot \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) \\
\frac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \quad \square
\end{aligned}$$

Durch den Beweis lässt sich $\forall n \in \mathbb{N}$ verallgemeinern, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{4n} f}{\mathrm{d}x^{4n}} &= \sin(x) \to \frac{\mathrm{d}^{4n} f}{\mathrm{d}0^{4n}} = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^{4n+1} f}{\mathrm{d}x^{4n+1}} &= \cos(x) \to \frac{\mathrm{d}^{4n} f}{\mathrm{d}0^{4n+1}} = 1 \\
\frac{\mathrm{d}^{4n+2} f}{\mathrm{d}x^{4n+2}} &= -\sin(x) \to \frac{\mathrm{d}^{4n} f}{\mathrm{d}0^{4n+2}} = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^{4n+3} f}{\mathrm{d}x^{4n+3}} &= -\cos(x) \to \frac{\mathrm{d}^{4n} f}{\mathrm{d}0^{4n+3}} = -1.
\end{aligned}$$

Im TAYLORpolynom der Sinusfunktion treten demnach nur ungerade Exponenten auf, da $f^{(n)}$ für $n \in \mathbb{N}$ bei geradem n gleich Null ist und sich somit aufhebt. Man erhält mit Einsetzen in die allgemeine Formel:

$$f(x) = \left(1 \cdot \frac{x^1}{1!}\right) + \left(-1 \cdot \frac{x^3}{3!}\right) + \left(1 \cdot \frac{x^5}{5!}\right) + \left(-1 \cdot \frac{x^7}{7!}\right) + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \square$$

Beweis einer Grenzwertregel:
Um zu beweisen, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ nimmt man sich die TAYLORreihe der Sinusfunktion zur Hilfe. Sei $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^0 \frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{1}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!}$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 + 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \square$$

10.3.2 Taylorreihe der Kosinusfunktion

Für die Herleitung der TAYLORreihe der Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$ gilt ähnliches wie für die TAYLORreihe der Sinusfunktion. Zuerst beweist man durch vollständige Induktion, dass sich die n-te Ableitung von f alle $4n, n \in \mathbb{N}$ wiederholt und vervollständigt mit dieser Erkenntnis die allgemeine Formel der TAYLORreihe an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. Durch Zusammenfassen der Reihe erhält man:

$$\cos(x) = \mathrm{T}f(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots$$

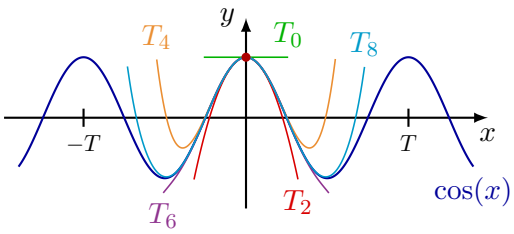


Abb. 10.4: Visualisierung der ersten n-gradigen Polynome (T_0 bis T_8) bzw. Potenzreihen der TAYLORreihe für die Kosinusfunktion

10.4 Binomischer Lehrsatz

Das nach dem französischen Mathematiker BLAISE PASCAL benannte PASCAL'sche Dreieck (siehe Abb. 10.5) hat einen grundlegenden Stellenwert in der Analysis. Es baut auf dem binomischen Lehrsatz auf. Das n-te Produkt eines beliebigen Terms aus zwei Variablen mit sich selbst lässt sich als endliche Summe von Teilprodukten darstellen. Diese Struktur spielt nicht nur in der kontinuierlichen Mathematik eine Rolle, sondern auch in der Stochastik.

Im Folgenden gilt es den binomischen Lehrsatz durch eine vereinfachte Darstellung mit vollständiger Induktion zu beweisen. Es sei

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Abb. 10.5: ganzzahliges PASCAL'sches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} \\
 & & & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & & & & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Abb. 10.6: PASCAL'sches Dreieck mit Binominalkoeffizienten

I) $n = 1$

$$\begin{aligned}(1+x)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^k \\ &= \binom{1}{0} x^0 + \binom{1}{1} x^1 \\ 1 + x &= 1 + x\end{aligned}$$

II) Schluss von n auf $n+1$

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \\ (1+x)^n(1+x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow (1+x)^n(1+x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k-1} + x^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k + \binom{n}{n} x^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + x \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \right) \\ &= (1+x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \square$$

Der Beweis für einen Term mit zwei Variablen erfolgt analog. Es sei

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

I) $n = 1$

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\ a + b &= a + b\end{aligned}$$

II) Schluss von n auf $n+1$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\ (a+b)^n (a+b) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

Es gilt weiterhin:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow\ (a+b)^n(a+b) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&\quad + b\left(\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&\quad + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{(k+1)-1}a^{n+1-(k+1)}b^{(k+1)-1}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
&= (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right) \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \square
\end{aligned}
$$

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

Die Menge und der algebraische Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ stellt eine Erweiterung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dar. Sie wurden unter anderem eingeführt, um Gleichungen der Art $x^2 + 1 = 0$ lösen zu können. Neben der reellen Zahlengerade befindet sich in der Ebene der komplexen Zahlen noch eine weitere Achse. Diese trägt den Namen "imaginäre Achse" und steht orthogonal auf der reellen Zahlengerade. Komplexe Zahlen bestehen wie zweidimensionale Vektoren aus zwei Komponenten. Ihre Darstellung erfolgt analog auf einer Ebene (der Gauss'schen Zahlenebene); weil $\mathbb{C}$ einen zweidimensionellen reellen Vektorraum definieren, werden sie in einem ebenen kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Grundsätzlich gilt, dass je größer (quantitativ betrachtet) ein algebraischer Körper ist, desto weniger unterscheidbare Eigenschaften weisen die einzelnen Elemente untereinander auf. Bei den komplexen Zahlen ist die Eigenschaft der Ordnung verloren gegangen. Das heißt, dass es nicht mehr möglich ist eine Aussage darüber zu treffen, welche komplexe Zahl größer oder kleiner als eine andere ist. Die Relationen $>$ und $<$ ergeben

in diesem Kontext keinen Sinn mehr. Die komplexen Zahlen beinhalten die natürlichen, ganzen, rationalen und die reellen Zahlen.

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ wird als

$$z = a + b \cdot i \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \vec{z} = (a\mathbf{i}, b\mathbf{j})$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt. i ist die konstante imaginäre Einheit und nimmt in der Darstellung dieselbe Funktion wie der kanonische Vektor $\mathbf{j}$ ein (siehe 5.5). Der Betrag (oder die Länge) einer komplexen Zahl (des Vektors) berechnet sich mithilfe des Satzes des Pythagoras durch $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

11.1 Rechenregeln

Es werden die zwei komplexen Zahlen $v = a + bi$ und $w = c + di$ betrachtet. v und w sind äquvalent, wenn die reellen Koeffizienten a und c sowie die imaginären Koeffizienten b und d äquivalent sind.

11.1.1 Potenzen der imaginären Einheit

Für die Potenzen von i lässt sich eine Periodizität aller $4n, n \in \mathbb{N}$ feststellen. Über $i^n, n \in \{1, 2, 3, 4\}$ kann man

$$\begin{aligned}
i^1 &= \sqrt{-1} \\
i^2 &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^1 = -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1
\end{aligned}$$

feststellen. Da i^4=1 ist lässt sich allgemein sagen, dass $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot 1 = 1$$

$$i^{4n+1} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^2 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot (-1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot \ldots \cdot i^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots \cdot -i = -i$$

11.1.2 Addition und Multiplikation

Die imaginäre Einheit wird als Variable behandelt. Es gelten daher gleiche Rechenregeln wie in den reellen Zahlen. Somit ergibt sich

1. für die Addition: $v + w := (a + c)(b + d)i$

2. für die Multiplikation: $v \cdot w := (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bd)i$.

11.2 Euler'sche Formel und Identität

Die EULER'sche Formel oder EULER'sche Relation stellt eine Verbindung zwischen den trigonometrischen und der komplexen Exponentialfunktion dar. Sie lautet für $y \in \mathbb{R}$:

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

Für die Herleitung nehme man sich das Taylorpolynom für die natürliche Exponentialfunktion und führt Umformungen durch, die zu den Taylorpolynomen der Sinus- bzw. Kosinus-

funktionen führen:

$$\begin{aligned}
e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\
&= 1 + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \dots \\
&= 1 - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i\frac{y^5}{5!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + \mathrm{i} \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(y) + i\sin(y) \quad \square
\end{aligned}$$

Setzt man für $y = \pi$, so erhält man die sogenanne Euler'sche Identität :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$

11.3 Additionstheoreme

Mit dem Wissen über die Euler'sche Formel über die Verbindung zur Trigonometrie lassen sich Aussagen über trigonometrische Winkelfunktionen von Summen herleiten.

$$\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\
e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} \\
e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} &= [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)] \cdot [\cos(\beta) + i\sin(\beta)] \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i\cos(\alpha)\sin(\beta) \\
&\quad + i\sin(\alpha)\cos(\beta) + i^2\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

$$+ i[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)]$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i\left[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right]$$

Sind zwei komplexe Zahlen gleich, stimmen Real- und Imaginärteil überein. Das heißt, dass:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Des Weiteren lassen sich interessante Identitäten schlussfolgern:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\\ &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}\\ &= \frac{\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} + \frac{\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}\\ &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}\end{aligned}$$

Teil III

glossarium

Mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung	Erläuterung
Folgen und Reihen		
$\sum a_i$	"Summe"	Summe aller Elemente a_i
$\sum_{i=k}^{n} a_i$	"Summe von k bis n"	Summe aller Elemente a_i von k bis n
$\prod a_i$	"Produkt"	Produkt aller Elemente a_i
$\prod_{i=k}^{n} a_i$	"Produkt von k bis n"	Produkt aller Elemente von k bis n a_i
a_n	"Folge"	Folge aller Folgeglieder a_i bis a_n
$\rightarrow$	"konvergiert"	a nähert sich dem Wert b an
∞	"Unendlichkeit"	kein Ende
Logik		
$\forall$	"Für alle"	Die folgende Eigenschaft gilt für alle Objekte
$\exists$	"Es existiert"	Es gibt ein Objekt mit folgender Eigenschaft

$\exists!$	"Es existiert genau ein"	Es gibt genau ein Objekt mit dieser Eigenschaft
$\wedge$	"Logisches Und"	Beide Aussagen sind wahr
$\vee$	"Logisches Oder"	Mindestens eine der Aussagen ist wahr
$\dot{\vee}$, $\oplus$	"Ausschließendes Oder"	Nur eine der beiden Aussagen ist wahr
$\neg$	"Logisches Nicht"	Die Aussage gilt nicht
$\Leftrightarrow$	"genau dann, wenn"	Die beiden Aussagen folgen aufeinander
$\Rightarrow$	"wenn, dann"	Eine Aussage folgt aus der Anderen
$:=$	"bedeutet"	A ist definiert als "Aussage"
$\square$	"quod erat demonstrandum"	Es wurde gezeigt, was zu beweisen war.

Mengen

$\cup$	"Vereinigung"	Alle Elemente der Mengen
$\cap$	"Durchschnitt"	Alle gemeinsamen Elemente der Mengen
$\subset$	"Teilmenge"	Eine Menge ist einer der Anderen enthalten

$\subseteq$	"Echte Teilmenge"	Beide Mengen enthalten sich gegenseitig
$\in$	"Element"	Ein Objekt ist Element einer Menge
$\{\}$	"Menge"	Gruppe von Elementen
$\emptyset$	"Nichts"	eine leere Menge, keine Elemente
$\mid$	"Bedinung"	Alle Elemente, die diese Bedingung erfüllen
$\setminus$	"Außer"	Alle Elemente, außer
$\times$	"Kartesisches Produkt"	Zwei Mengen kartesisch multipliziert
$\overline{A}$	"Komplementärmenge"	Das Gegenteil von A / Die Ergänzung zu A
$\|A\|$	"Mächtigkeit von A"	Die Anzahl aller Elemente von A

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$	"Natürliche Zahlen"	Alle zum Zählen verwendete Zahlen größer Null
$\mathbb{N}_0$	"erweiterte Natürliche Zahlen"	Alle zum Zählen verwendete Zahlen und Null
$\mathbb{Z}$	"Ganze Zahlen"	Alle zum Zählen verwendbare Zahlen

$\mathbb{Q}$	"Rationale Zahlen"	Alle Zahlen, die in Brüchen ausgedrückt werden können
$\mathbb{I}$	"Irrationale Zahlen"	Alle Zahlen, die nicht in Brüchen ausgedrückt werden können.
$\mathbb{R}$	"Reelle Zahlen"	Rationale und Irrationale Zahlen
$\mathbb{C}$	"Komplexe Zahlen"	Alle Zahlen mit einem Real- und einem Imaginäranteil
$\mathbb{P}$	"Primzahlen"	Alle Zahlen, die nur durch 1 und sich selber teilbar sind, sodass kein Rest entsteht.
$\mathbb{T}$	"Transzendente Zahlen"	Alle Zahlen, die nicht als n-gradiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ausgedrückt werden können
$\mathbb{A}$	"Algebraische Zahlen"	Alle Zahlen, die als n-gradiges Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ausgedrückt werden können
$\mathbb{H}$	"Quaternionen"	Alle Zahlen mit einem Real- und drei Imaginäranteilen

Arithmetik

$+$	"Addition"	Die Summanden werden addiert zur Summe
$-$	"Subtrakation"	Der Subtrahent wird vom Minuend subtrahiert
$\pm$	"Plus-Minus"	Addition oder Subtraktion
$\cdot$	"Multiplikation"	Die Faktoren werden multipliziert
$:, \frac{a}{b}$	"Division"	Der Divident wird druch den Divisor dividiert
a^b	"Potenz"	Die Basis wird durch den Exponenten potenziert
$\sqrt[n]{}$	"Wurzel"	Die n-te Wurzel aus einer Zahl
$\|a\|$	"Betrag"	Abstand zum Ursprung
$=$	"ist gleich"	Die Objekte sind gleich
$\neq$	"ist nicht gleich"	Die Objekte sind nicht gleich
$\sim$	"proportional"	Die Objekte sind proportional
$>$	"größer als"	Ein Objekt ist größer als das Andere

$<$	"kleiner als"	Ein Objekt ist kleiner als das Andere
$\geq$	"größer-gleich "	Ein Objekt ist mindestens so groß wie das Andere
$\leq$	"kleiner-gleich"	Ein Objekt ist höchstens so groß wie das Andere

Intervalle

$[a;b]$	"abgeschlossenes Intervall von a bis b"	Im Bereich von a bis b
$[a;b[$	"rechts offenes Intervall von a bis b"	Im Bereich zwischen inkl. a und ohne b
$]a;b]$	"links offenes Intervall von a bis b"	Im Bereich zwischen ohne a und inkl. b
$]a;b[$	"offenes Intervall von a bis b"	Im Bereich zwischen a und b

Teilbarkeit

$a \mid b$	"teilt"	a teilt b
$a \nmid b$	"teilt nicht"	a teilt b nicht
$a \perp b$	"teilerfremd"	a und b haben keine gemeinsame Teiler
$a \sqcap b$	"Größter gemeinsamer Teiler"	Größter gemeinsamer Teiler von a und b

$a \sqcup b$	"Größtes gemeinsames Vielfaches"	Größstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$a \equiv b \mod n$	"kongruent modulu"	a ist kongruent zu b modulu n / b ist der Rest, der beim Teilen von a durch n entsteht

Funktionen

$\rightarrow$	"bildet ab"	Eine Menge bildet eine Funktion auf eine Menge ab
$\mapsto$	"bildet ab"	Ein Element bildet einen Wert auf ein Element ab
$f(x)$	"f von x"	Der Wert von f für x
f^{-1}	"Umkehrfunktion von f"	umgekehrte Zuordnung von f
$\circ$	"Verkettung"	Verkettung zweier Funktionen miteinander
$\lim_{a \to b}$	"Beidseitiger Grenzwert von b"	Es wird sich von links und rechts an b angenähert
$\lim_{a \uparrow b}$	"Linksseitiger Grenzwert von b	Es wird sich von links an b angenähert
$\lim_{a \downarrow b}$	"Rechtsseitiger Grenzwert von b"	Es wird sich von rechts an b angenähert

$\mathcal{O}$	"wächst höchstens so schnell wie"	Eine Funktion wächst langsamer oder genauso schnell wie ...
$f^n(x)$	"n-te Ableitung von f"	f n-mal differenziert
d	"Differential"	totales Differential der Funktion
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$	"differenziert nach x"	Differenziert / Abgleitet nach x
$\frac{\partial}{\partial x}$	"partiell differenziert n. x"	Partiell differenziert / abgeleitet nach x
$\int$	"Integral"	Das Integral einer Funktion
$\int_a^b$	"bestimmtes Integral von a bis b"	das bestimmte Integral einer Funktion von a bis b

Elementargeometrie

$\overline{AB}$	"Länge der Strecke"	Die Länge der Strecke von A bis B
$\overrightarrow{AB}$	"Verbindungs-Vektor"	Verbindungsvektor von A bis B
$\vec{v}$	"Vektor"	n-dimensionaler Vektor v
$\sphericalangle$	"Winkel"	Winkel zwischen zwei Schenkeln

$\triangle$	"Dreieck"	Eine planimetrische Form mit drei Eckpunkten
$\square$	"Viereck"	Eine planimetrische Form mit vier Eckpunkten
$\parallel$	"parallel"	Die Objekte sind parallel
$\nparallel$	"nicht parallel"	Die Objekte sind nicht parallel
$\perp$	"orthogonal"	Die Objekte sind orthogonal
$\cdot$, $\circ$	"Skalarprodukt	Die Vektoren skalar multipliziert
$\times$	"Kreuzprodukt"	Das Vektorprodukt zweier Vektoren des $\mathbb{R}^3$

Stochastik

!	"Fakultät"	Das Produkt aller natürlichen Zahlen begonnen bei 1 bis zur Zahl selbst
$\binom{n}{k}$	"Binomialkoeffizient"	n über k
$P(A)$	"Wahrscheinlichkeit"	Wahrscheinlichkeit von A
$P(A \mid B)$	"bedingte Wahrscheinlichkeit"	Wahrscheinlichkeit von A unter Bedinung B

$E(X), \mu$	"Erwartungswert"	Erwartungswert der Zufallsvariable X
$V(X)$	"Varianz"	Varianz der Zufallsvariable X
$\sigma(X)$	"Standardabweichung"	Standardabweichung der Zufallsvariable X
$\bar{x}$	"Arithmetisches Mittel"	Mittelwert einer Gruppe von Zahlen
$\mathcal{P}(X)$	"Potenzmenge von X"	Menge aller Teilmengen von X

Widmung

Wir widmen dieses Buch unserer langjährigen Mathematiklehrerin Frau W., unserer Physiklehrerin Frau G. (von der wir immer noch glauben, dass sie die RIEMANNsche Vermutung schon bewiesen hat) und Herrn Dr. G. (von dem wir ziemlich sicher wissen, dass er die RIEMANNsche Vermutung schon bewiesen hat) sowie Herrn T. und unserer Oberstufenberaterin Frau G. Alle haben sie uns auf unserem Weg zum Abitur für Mathematik begeistert, uns begleitet und gefördert.

Dafür möchten wir uns ganz herzlich bedanken.