mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

ST10: Stochastik I

Sommersemester 2026
Leitung: Prof. R. Schilling

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

1.1 Grundlegende Begriffe . . . 3
Definition 1.1.4 (Zufallsvariable) . . . 3
Definition 1.1.6 (Verteilung und Erwartungswert) . . . 3
Bemerkung 1.1.7 (Eigenschaften Erwartungswert) . . . 4

1.2 Kombinatorik . . . 4
Lemma 1.2.1 (Permutationen) . . . 4
Lemma 1.2.2 (Kombinationen – klassisch) . . . 4
Lemma 1.2.3 (Variationen – klassisch) . . . 5
Satz 1.2.7 (Abzählen von Abbildungen) . . . 5

1.3 Grundmodelle der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . 6
Definition 1.3.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum) . . . 6
Lemma 1.3.4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion) . . . 6
Beispiel 1.3.5 (Wichtige stetige Verteilungen) . . . 7

2 Bedingung und Unabhängigkeit **9**

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . 9
Definition 2.1.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit) . . . 9
Satz 2.1.2 (Eigenschaften und Satz von Bayes) . . . 9

2.2 Unabhängigkeit . . . 10
Definition 2.2.1 (Unabhängigkeit von Mengen) . . . 10
Korollar 2.2.7 (1. Blocklemma) . . . 11
Korollar 2.2.8 (2. Blocklemma) . . . 11
Satz 2.2.10 (Charakt. Unabhängigkeit) . . . 11
Definition 2.2.12 (Faltung) . . . 12
Definition 2.2.16 (Varianz, Kovarianz) . . . 13
Satz 2.2.18 (Bienaymé) . . . 13

zul. geändert am 7. November 2026

3 Zufallsvariablen **14**

3.1 Konstruktion von unabhängigen Zufallsvariablen 14
Satz 3.1.6 (Kolmogorov) 15
Korollar 3.1.8 (3. Blocklemma) 15

3.2 Charakteristische Funktionen 16
Definition 3.2.1 (Charakteristische Funktion) 16
Beispiel 3.2.2 (Wichtige CF) 16
Lemma 3.2.3 (Charakt. Fn. der Standardnormalverteilung) 17
Satz 3.2.4 (Eigenschaften der charakteristischen Funktion) 17
Satz 3.2.5 (Die Charakteristische Funktion charakterisiert) 17
Korollar 3.2.6 (Satz von Kac) 17
Satz 3.2.7 (Umkehrformel) 17

4 Konvergenz und Grenzverhalten **18**

4.1 Konvergenz von Zufallsvariablen 18
Definition 4.1.1 (Konvergenzarten) 18
Lemma 4.1.3 (Konvergenzimplikationen) 18
Beispiel 4.1.8 (Gegenbeispiele) 19
Satz 4.1.9 (Lévy 1925) 20

4.2 Konvergenz & Null-Eins Gesetze 20
Satz 4.2.1 (Borel-Cantelli) 20
Definition 4.2.3 (Terminale Sigma-Algebra) 20

4.3 Grenzwertsätze 21
Satz 4.3.1 (Maximalungleichung; Etemadi 1985) 21
Satz 4.3.2 (Lévy) 21
Satz 4.3.5 (Gesetz der kleinen Zahlen) 22
Satz 4.3.6 (Poisson-Approximation) 22
Satz 4.3.7 (Chebyshev; WLLN) 22
Satz 4.3.9 (Khintchin) 23
Satz 4.3.10 (DeMoivre; Laplace; CLT) 23
Satz 4.3.12 (SLLN; Kolmogorov 1933; Etemadi 1981) 23

5 Abhängige Prozesse **24**

5.1 Bedingte Erwartungen 24
Definition 5.1.1 (Bedingte Erwartung) 24
Satz 5.1.5 (Besondere Eigenschaften) 25

5.2 Martingale 26
Definition 5.2.2 (Martingale) 26
5.2.6 Konvergenzen 28

1 Einführung

1.1 Grundlegende Begriffe

Definition 1.1.1 (Experiment)**.** *Ein* **(Zufalls-)Experiment** *ist ein Meßraum* $(\Omega, \mathscr{A})$*, bestehend aus einer Menge* Ω *und einer* σ*-Algebra* $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$*. Dann heißt*

$$\omega \in \Omega \text{ Ergebnis} \qquad A \in \mathscr{A} \text{ Ereignis}$$

Definition 1.1.2 (Kolmogorov 1933)**.** *Sei* $(\Omega, \mathscr{A})$ *ein Experiment. Eine Mengenfunktion* $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ *mit den Eigenschaften*

(M1) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(\Omega) = 1$

(M2) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ *paarweise disjunkt* $\implies \mathbb{P}(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$

heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** *(W-Maß) oder* **Wahrscheinlichkeit***. Das Tripel* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *wird* **Wahrscheinlichkeitsraum** *genannt.*

Bemerkung 1.1.3. Jedes W-Maß ist insbesondere ein endliches Maß. Daher gelten alle Sätze aus `AN3O` (siehe Bibliothek).

Definition 1.1.4. (Zufallsvariable)**.** *Es sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $(E, \mathscr{E})$ *ein beliebiger Meßraum. Eine meßbare Abbildung*

$$X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (E, \mathscr{E})$$

heißt **(E-wertige) Zufallsvariable** *(kurz: ZV).*

Bemerkung 1.1.5. Wir werden meist $E = \mathbb{R}$ oder $E = \mathbb{R}^d$ zusammen mit den Borel-σ-Algebren betrachten. Die Wahl des W-Raums und damit der ZV ist nicht eindeutig und sollte daher als mathematisches Modell gesehen werden.

Definition 1.1.6. (Verteilung und Erwartungswert)**.** *Es sei* $X : \Omega \to E$ *eine ZV auf dem W-Raum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$*. Die* **Verteilung** *oder* **Wahrscheinlichkeitsverteilung** *der ZV* X *ist das Bildmaß*

$$B \mapsto \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{E}$$

von $\mathbb{P}$ *unter der meßbaren Abbildung* X*.*
Der **Erwartungswert** *einer reellen ZV* $X : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *ist das Integral*

$$\mathbb{E}X = \int X \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_\Omega X(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\, \mathbb{P}(X \in dx)$$

Bemerkung 1.1.7 (Eigenschaften Erwartungswert)**.** Da der Erwartungswert ein Integral ist, gelten natürlich auch alle Aussagen für Integrale aus `AN3O`. Im Folgenden seien $a, b \in \mathbb{R}$ und X_n, X, Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

a) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y$, wenn $\mathbb{E}|X|, \mathbb{E}|Y| < \infty$; (Linearität)

b) $\mathbb{E}X \geqslant 0$, wenn $X \geqslant 0$; (Positivität)

c) $\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$, wenn $X_n \geqslant 0$; (Fatou)

d) $\mathbb{E}X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$, wenn $X_n \geqslant 0,\ X_n \uparrow X$; (Beppo Levi)

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$, (dom. Konv.)
wenn $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ und $|X_n(\omega)| \leqslant Y(\omega)$ $\mathbb{P}$-fü für eine integrierbare ZV $Y \in L^p(\mathbb{P})$, d.h. $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

f) $\|X\|_{L^p} := \left(\mathbb{E}\left[|X|^p\right]\right)^{1/p},\ (1 \leqslant p < \infty)$, ($L^p$-Räume)
$\|X\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup} |X| := \inf\{c \geqslant 0 : \mathbb{P}(|X| \geqslant c) = 0\}$,
$X \in L^p(\mathbb{P})$ genau dann, wenn $\|X\|_{L^p} < \infty$;

g) $\mathbb{E}|XY| \leqslant \|X\|_{L^p} \|Y\|_{L^q}$ für $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$; (Hölder)

h) $\varphi(\mathbb{E}X) \leqslant \mathbb{E}\varphi(X)$ für $X \geqslant 0$ und konvexe $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$; (Jensen)

i) $\mathbb{P}(|X| \geqslant \epsilon) \leqslant \epsilon^{-1}\mathbb{E}|X|$; (Markov)

j) $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geqslant \epsilon) \leqslant \epsilon^{-2}\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$; (Chebyshev)

k) $\mathbb{E}|X| = \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}(|X| \geqslant t)\, dt = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X| > t)\, dt$

1.2 Kombinatorik

Lemma 1.2.1 (Permutationen)**.** *Es sei Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$. Dann gilt*

$$|\{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \Omega,\ \omega_i \neq \omega_k \text{ für } i \neq k\}| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Lemma 1.2.2 (Kombinationen – klassisch)**.** *Es sei Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

$$|\{(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mid \omega_i \in \Omega,\ \omega_1 < \cdots < \omega_k\}| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

d.h. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen von Ω.

Lemma 1.2.3 (Variationen – klassisch)**.** *Es sei Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$|\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \Omega,\ \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}| = \frac{n!}{(n-k)!}$$

d.h. es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, k von n Elementen ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen.

Bemerkung 1.2.4. Permutationen sind klassische Variationen für $k = n$. Insbesondere gibt es genauso viele Möglichkeiten n auf $n-1$ Plätze zu verteilen wie n auf n Plätze zu verteilen.

Lemma 1.2.5 (Kombinationen – mit Wiederholung)**.** *Es sei Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$|\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \Omega,\ \omega_1 \leqslant \dots \leqslant \omega_k\}| = \binom{n+k-1}{k}$$

d.h. $\binom{n+k-1}{k}$ ist die Anzahl aller Möglichkeiten, k Elemente aus Ω mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen.

Lemma 1.2.6 (Variationen – mit Wiederholung)**.** *Es sei Ω eine Menge mit $|\Omega| = n$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$|\{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in \Omega\}| = |\Omega^k| = n^k$$

d.h. es gibt n^k Möglichkeiten, k Elemente aus Ω mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge zu ziehen.

Satz 1.2.7 (Abzählen von Abbildungen)**.** *Es seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $f : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Abbildung. Dann gilt für die Anzahl der Abbildungen f mit den jeweiligen Eigenschaften:*

a) Ist f injektiv (für $n \geqslant k$), so gibt es $\binom{n}{k} \cdot k!$ solche Abbildungen.

b) Ist f streng monoton wachsend (für $n \geqslant k$), so gibt es $\binom{n}{k}$ solche Abbildungen.

c) Ist f monoton wachsend (für beliebige n, k), so gibt es $\binom{n+k-1}{k}$ solche Abbildungen.

d) Ist f surjektiv (für $n \leqslant k$), so gibt es

$$T(k,n) := \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (n-\ell)^k$$

solche Abbildungen.

1.3 Grundmodelle der Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 1.3.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)**.** *Ein W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ heißt* **diskret***, wenn Ω abzählbar (endlich oder unendlich) und $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ ist. Eine auf einem diskreten W-Raum definierte ZV bzw. Verteilung nennt man ebenso* **diskret***.*

Bemerkung 1.3.2. Da jede Teilmenge $A \subset \Omega$ einer abzählbaren Menge selbst abzählbar ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) \quad \text{also} \quad \mathbb{P} = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\})\, \delta_\omega$$

d.h. die Werte $\mathbb{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$, bestimmen $\mathbb{P}$ vollständig. Auf einem diskreten W-Raum sind alle Abbildungen $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ meßbar, der Wertebereich $X(\Omega)$ ist abzählbar, und beliebige Funktionen $f(X)$ einer ZV X sind wieder Zufallsvariablen. Das Integral wird dabei zu einer Summe

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}f(X) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x)$$

Definition 1.3.3 (Stetige und absolutstetige Zufallsvariable)**.** *Eine ZV $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ heißt* **stetig***, wenn die Verteilungsfunktion*

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_d) := \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \ldots, X_d \leqslant x_d), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

stetig ist. X heißt **absolutstetig***, wenn X eine Dichte bezüglich des Lebesguemaßes besitzt:*

$$\mathbb{P}_X(dx) = p(x)\, \mathrm{d}x$$

Lemma 1.3.4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion)**.** *Die Verteilungsfunktion $F(x) := F_X(x) := \mathbb{P}(X \leqslant x)$, $x \in \mathbb{R}$, einer reellen ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

a) $x \mapsto F(x)$ *ist monoton wachsend;*

b) $x \mapsto F(x)$ *ist rechtsseitig stetig;*

c) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *und* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Beispiel 1.3.5 (Wichtige stetige Verteilungen)**.**

a) **Gleichverteilung auf dem Intervall** $[a, b]$**.** $X \sim U[a, b]$, d.h. X hat die Dichte $p(x) = (b-a)^{-1}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. Es gilt $\int \mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x = b - a$ und

$$\mathbb{E}X = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a+b)$$

sowie

$$\mathbb{V}X = \sigma^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x-\mu)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

b) **(Einseitige) Exponentialverteilung.** $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ \lambda > 0$, d.h. X hat die Dichte $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Es gilt $\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1/\lambda$ und

$$\mathbb{E}X = \mu = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$$

sowie

$$\mathbb{V}X = \sigma^2 = \int_0^\infty (x-\mu)^2\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2}$$

Die Exponentialverteilung wird häufig zur Modellierung von Wartezeiten und Wachstumsprozessen verwendet.

c) **(Eindimensionale) Cauchy-Verteilung.** $X \sim \mathcal{C}(\lambda, a)$ heißt Cauchy-verteilt, wenn $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}$ gilt. Wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{\lambda^2 + (x-a)^2} \overset{\substack{y=(x-a)/\lambda \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\lambda}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \pi$$

ist $p(x)$ eine W-Dichte, aber wegen $|x|p(x) \approx c|x|^{-1}$ und $x^2 p(x) \approx c$ (für $|x| \to \infty$) existieren weder Erwartungswert noch Varianz.

d) **(Eindimensionale) Normalverteilung.** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, d.h. X hat die Dichte

$$g_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

mit $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$. Die Parameter μ und σ^2 sind Erwartungswert und Varianz:

$$\mathbb{E}X = \mu \qquad \mathbb{V}X = \sigma^2$$

σ heißt **Standardabweichung**; für $\sigma = 1, \mu = 0$ nennen wir $\mathcal{N}(0,1)$ die Standard - Normalverteilung oder **Gaußverteilung**

2 Bedingung und Unabhängigkeit

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 2.1.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** *Die* **bedingte Wahrscheinlichkeit** *von $A \in \mathscr{A}$ gegeben $B \in \mathscr{A}$ ist*

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \begin{cases} \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, & \text{für } \mathbb{P}(B) > 0, \\ 0, & \text{für } \mathbb{P}(B) = 0. \end{cases}$$

Satz 2.1.2 (Eigenschaften und Satz von Bayes)**.** *Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A_m, B_n, A, B \in \mathscr{A}$.*

a) $A \mapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ *ist für alle $B \in \mathscr{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ ein W-Maß auf $(\Omega, \mathscr{A})$.*

b) **Kettenformel.** *Es gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\, \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \prod_{m=2}^{n} \mathbb{P}(A_m \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{m-1}) \end{aligned}$$

c) **Totale Wahrscheinlichkeit.** *Für jede Zerlegung $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Omega$ von Ω gilt*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)\, \mathbb{P}(A \mid B_n)$$

d) **Bayessche Formel.** *Für jede Zerlegung $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Omega$ von Ω gilt*

$$\mathbb{P}(B_m \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_m)\, \mathbb{P}(A \mid B_m)}{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)\, \mathbb{P}(A \mid B_n)}$$

insbesondere ist

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(A \mid B)}{\mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(B^c)\, \mathbb{P}(A \mid B^c)}$$

2.2 Unabhängigkeit

Definition 2.2.1 (Unabhängigkeit von Mengen)**.** *Es sei I eine beliebige Indexmenge. Die Mengen $(A_i)_{i\in I} \subset \mathscr{A}$ heißen* **unabhängig** *(u.a.), wenn gilt*

$$\forall J \subset I,\ |J| < \infty : \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

Bemerkung 2.2.2.

Paarweise Unabhängigkeit $\not\Longleftarrow$ Unabhängigkeit

Definition 2.2.3 (Unabhängigkeit von Familien und ZVn)**.** *Es seien I eine beliebige Indexmenge und $(E_i, \mathscr{E}_i)$ Meßräume.*

a) Die Familien $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{A}$, $i \in I$, heißen **unabhängig***, wenn gilt*

$$\forall J \subset I,\ |J| < \infty,\ \forall A_i \in \mathscr{F}_i,\ i \in J : \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$

b) Die ZV $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (E_i, \mathscr{E}_i)$, $i \in I$, heißen **unabhängig***, wenn die σ-Algebren*

$$\sigma(X_i) = X_i^{-1}(\mathscr{E}_i) = \{\{X_i \in F\} \mid F \in \mathscr{E}_i\}, \quad i \in I$$

unabhängig sind.

Lemma 2.2.4. *Für jede Indexmenge I sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) die Ereignisse A_i, $i \in I$, sind unabhängig;

b) die σ-Algebren $\sigma(A_i)$, $i \in I$, sind unabhängig;

c) die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_{A_i}$, $i \in I$, sind unabhängig.

Bemerkung 2.2.5. Während "Weglassen" die Unabhängigkeit nicht zerstört, können nicht ohne Weiteres Mengen zu unabhängigen Systemen hinzugefügt werden. Ausnahmen sind (wie das Lemma zeigt): $\emptyset, \Omega$.

Satz 2.2.6. *Es seien $\mathscr{F}_i \subset \mathscr{A},\ i \in I$, $\cap$-stabile Familien ($F, G \in \mathscr{F}_i \Rightarrow F \cap G \in \mathscr{F}_i$). Dann gilt*

$$\mathscr{F}_i,\ i \in I \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(\mathscr{F}_i),\ i \in I \text{ unabhängig}$$

Korollar 2.2.7 (1. Blocklemma)**.** *Es seien $\mathscr{F}_{ik} \subset \mathscr{A},\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n(i)$, unabhängige $\cap$-stabile Familien. Dann sind auch die folgenden σ-Algebren unabhängig:*

$$\mathscr{G}_i := \sigma(\mathscr{F}_{i1}, \ldots, \mathscr{F}_{in(i)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

Korollar 2.2.8 (2. Blocklemma)**.** *Es seien $X_{ik} : \Omega \to E,\ 1 \leqslant k \leqslant n(i),\ 1 \leqslant i \leqslant m$, unabhängige ZV und $f_i : E^{n(i)} \to \mathbb{R}$ meßbare reelle Funktionen. Dann sind auch die ZV*

$$f_i(X_{i1}, \ldots, X_{in(i)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

unabhängig.

Bemerkung 2.2.9. Die Blocklemmata besagen, dass man unabhängige Objekte beliebig zu disjunkten Blöcken zusammenfassen und pro Block verrechnen darf, ohne die Unabhängigkeit **zwischen** den Blöcken zu verlieren – im 1. Blocklemma für erzeugte σ-Algebren, im 2. Blocklemma für Funktionen f_i angewandt auf Gruppen von Zufallsvariablen. Beispielsweise sind für unabhängige $X_1, \ldots, X_{10}$ dann auch $X_1 + X_2 + X_3$, $\max\{X_4, \ldots, X_7\}$ und $X_8 \cdot X_9 \cdot X_{10}$ unabhängig.

Satz 2.2.10 (Charakt. Unabhängigkeit)**.** *Es seien $X_1, \ldots, X_n : (\Omega, \mathscr{A}) \to (E, \mathscr{E})$ ZV und $\mathscr{G}$ sei ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathscr{E}$. Dann sind äquivalent:*

a) $X_1, \ldots, X_n$ *sind unabhängig;*

b) $\mathbb{P}(X_1 \in G_1, \ldots, X_n \in G_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in G_k) \qquad \forall G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{G}$

c) $\mathbb{P}_{X_1,\ldots,X_n} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$.

Wenn $E = \mathbb{R}^d$ ist, dann sind a)–c) auch äquivalent zu (siehe 3.2.1)

d) $\phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(\xi_k) \qquad \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$

Korollar 2.2.11. *Es seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ unabhängige ZV und $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ meßbar. Wenn $f_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, n)$ oder $f_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P})$ $(i = 1, \dots, n)$, dann ist*

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E} f_i(X_i);$$

insbesondere gilt

$$f_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P}) \; \forall i \implies \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) \in L^1(\mathbb{P}).$$

Speziallfall $n = 2$*: X, Y u.a., $f, g, h \geq 0$, dann*

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E} f(x) \mathbb{E} g(Y)$$

$$\mathbb{E}h(X,Y) = \mathbb{E}h(X,Y) = \iint h(x,y)\, \mathbb{P}(X \in dx)\, \mathbb{P}(Y \in dy)$$

$$= \mathbb{E} \int h(x,Y)\, \mathbb{P}(X \in dx) = \mathbb{E} \int h(X,y)\, \mathbb{P}(Y \in dy).$$

Definition 2.2.12 (Faltung)**.** *Es seien μ, ν W-Maße auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Das durch*

$$\mu * \nu(B) := \iint \mathbb{1}_B(x+y)\, \mu(dx)\, \nu(dy), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),$$

definierte W-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt **Faltung** *von μ und ν.*

Satz 2.2.13. *Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ unabhängige ZV. Dann ist*

$$\mathbb{P}_{X+Y} = \mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y.$$

Wenn $X \sim f(x)\, dx$ und $Y \sim g(x)\, dx$, dann $X + Y \sim h(z)\, dz$ mit

$$h(z) = \int f(z-x) g(x)\, dx.$$

Bemerkung 2.2.14. Dieser Satz zeigt, dass $\mathbb{P}_X * \mathbb{P}_Y$ das Bildmaß von $\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_{X,Y}$ unter der Abbildung $\mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^d, (x,y) \mapsto x + y$ ist.

Beispiel 2.2.15. Oft bleiben gefaltete Verteilungen (insb. im Fall $d = 1$) gleich verteilt. Beispiele hierfür sind:

1. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) * \mathcal{N}(\nu, \tau^2) = \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$ (Normalverteilung)
2. $\Gamma_{\alpha,\beta} * \Gamma_{\alpha',\beta} = \Gamma_{\alpha+\alpha',\beta}$ (Gammaverteilung)

3. $\mathcal{B}(n,p) * \mathcal{B}(m,p) = \mathcal{B}(n+m,p)$ (Binomialverteilung)

4. $\mathrm{Poi}(\lambda) * \mathrm{Poi}(\mu) = \mathrm{Poi}(\lambda+\mu)$ (Poissonverteilung)

Definition 2.2.16 (Varianz, Kovarianz)**.** *Es seien $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ reelle ZV. Dann definieren wir*

- **Varianz** $\mathbb{V}X = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$*. Standardnotation* $\mathbb{V}X = \sigma_X^2 = \sigma^2$*.*
- **Kovarianz** $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right)$*.*

Lemma 2.2.17. *Es seien $X, Y \in L^2(\mathbb{P})$ reelle ZV. Dann gilt*

a) $\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \in [0,\infty)$*;*

b) $\mathbb{V}X \leq \mathbb{E}\left((X-a)^2\right)$*, d. h.* $a = \mathbb{E}X$ *minimiert* $a \mapsto \mathbb{E}\left((X-a)^2\right)$*.*

c) $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}X$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

d) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X)$ *und* $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,X) = \mathbb{V}X$*.*

e) $\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X-Y) = 4\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$*.*

f) $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}X + \mathbb{V}Y - 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$*.*

Satz 2.2.18 (Bienaymé)**.** *Es seien $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ paarweise unkorrelierte ZV in $L^2(\mathbb{P})$, d. h. $\mathbb{E}(X_iX_k) = \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_k \iff \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_i,X_k) = 0$ für $i \neq k$. Dann gilt*

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}X_i.$$

3 Zufallsvariablen

3.1 Konstruktion von unabhängigen Zufallsvariablen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Lemma 3.1.1 (Inverse Verteilungsfunktion)**.** *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann hat F eine eindeutig bestimmte verallgemeinerte, monoton wachsende rechtsstetige Inverse:*

$$F^{-1}(s) = G(s) = \inf\{t \mid F(t) > s\}.$$

Für beliebige $s \in [0,1]$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

a) $F(t) \geq s \iff G(s-) \leq t$;

b) $F(G(s)) \geq s$ *und wenn F an der Stelle $t = G(s)$ stetig ist, dann ist $F(G(s)) = s$;*

c) $G(F(t)) \geq t$ *und wenn G an der Stelle $s = F(t)$ stetig ist, dann ist $G(F(t)) = t$.*

Korollar 3.1.2. *Zu jeder Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ und eine ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$, so daß*

$$\mathbb{P}(X \leq t) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt.

Korollar 3.1.3. *Zu zwei W-Räumen $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}), (\Omega', \mathscr{A}'\mathbb{P}')$ existieren zwei unabhängige Zufallsvariablen X, Y mit $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \otimes P'_Y$*

Definition 3.1.4. *Für $\emptyset \neq K \subset I$ ist*

$$\Omega_K := \bigtimes_{i \in K} \Omega_i := \left\{ f : K \to \bigcup_{i \in K} \Omega_i \;\middle|\; f(i) \in \Omega_i \; \forall i \in K \right\}$$

das Produkt der $(\Omega_i)_{i \in K}$. Weitere Bezeichnungen ($K \subset J \subset I$):

- *i-te Koordinate von $f \in \Omega_K$:* $f(i)$;
- *Koordinatenprojektion* $\pi_i : \Omega_I \to \Omega_i,\ f \mapsto f(i),\ i \in I$;
- $\pi_i^K : \Omega_K \to \Omega_i,\ f \mapsto f(i),\ i \in K$;
- *Projektion auf Ω_K:* $\pi_K^J : \Omega_J \to \Omega_K,\ f \mapsto f|_K$;
- $\pi_K := \pi_K^I : \Omega_I \to \Omega_K$;

– *endliche Indexmengen* $\mathscr{H} := \mathscr{H}(I) := \{K \subset I \mid 0 < |K| < \infty\}$.

Für $\emptyset \neq K \subset L \subset J \subset I$ *gilt insbesondere*

$$\pi_i^K = \pi_{\{i\}}^K, \quad \pi_i = \pi_{\{i\}}^I, \quad \textit{und} \quad \pi_K^J = \pi_K^L \circ \pi_L^J.$$

Definition 3.1.5 (Unendliches Produkt von Sigma-Algebren)**.** *Das unendliche Produkt* $\mathscr{A}_I := \bigotimes_{i\in I} \mathscr{A}_i$ *der* σ*-Algebren* $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ *ist definiert als*

$$\mathscr{A}_I := \sigma(\pi_i,\, i \in I) = \sigma\left(\pi_i^{-1}(\mathscr{A}_i),\, i \in I\right).$$

Satz 3.1.6 (Kolmogorov)**.** *Es seien* $(\Omega_i, \mathscr{A}_i, \mathbb{P}_i)_{i\in I}$ *beliebig viele W-Räume. Dann existiert auf* $(\Omega_I, \mathscr{A}_I)$ *genau ein W-Maß* $\mathbb{P} = \mathbb{P}_I$ *mit der Eigenschaft, daß*

$$\forall H \in \mathscr{H}: \quad \pi_H(\mathbb{P}) = \mathbb{P}_H = \bigotimes_{i\in H} \mathbb{P}_i \quad \textit{(endliches Produkt).}$$

Das Maß $\mathbb{P}$ *heißt* **unendliches Produkt** *der Maße* $(\mathbb{P}_i)_{i\in I}$*:* $\mathbb{P} = \bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}_i$.

Korollar 3.1.7. *Es seien* $X_i : \Omega \to E$, $i \in I$, *ZV, die auf demselben W-Raum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *definiert sind. Dann gilt*

$$(X_i)_{i\in I} \textit{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\mathbb{P}_{(X_i)_{i\in I}}}_{\textit{gemeinsame Verteilung}} = \underbrace{\bigotimes_{i\in I} \mathbb{P}_{X_i}}_{\textit{Produktmaß}}}_{\textit{Maße auf } (E_I, \mathscr{E}_I)}$$

Korollar 3.1.8 (3. Blocklemma)**.** *Es seien* $X_i : (\Omega, \mathscr{A}) \to (\Omega_i, \mathscr{A}_i)$, $i \in I$, *unabhängige ZV,* $I = \bigsqcup_{k\in K} I_k$ *eine beliebige Partition von* I, *und*

$$f_k : \left(\bigtimes_{i\in I_k} \Omega_i,\, \bigotimes_{i\in I_k} \mathscr{A}_i\right) \to (E_k, \mathscr{E}_k), \quad k \in K,$$

meßbare Abbildungen. Dann sind die ZV

$$f_k\left((X_i)_{i\in I_k}\right) : \Omega \to E_k, \quad k \in K,$$

unabhängig.

Bemerkung 3.1.9. Mit dem 3. Blocklemma erweitert sich die Aussage von 2.2.8 auf beliebig viele (insbesondere auch überabzählbar viele) Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$. Die Unabhängigkeit geht dabei unter den gegebenen Voraussetzungen – getragen von der Existenz unendlicher Produktmaße nach 3.1.6 – auch bei beliebiger Verkettung/Blockbildung nicht verloren.

3.2 Charakteristische Funktionen

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 3.2.1 (Charakteristische Funktion)**.** *Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine ZV. Die Funktion $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$*

$$\phi_X(\xi) := \mathbb{E}e^{i\langle \xi, X\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle}\, \mathbb{P}(X \in dx), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d$$

heißt **charakteristische Funktion** *von X.*

Beispiel 3.2.2 (Wichtige CF)**.**

a) **Degenerierte Verteilung.** $X \sim \delta_c$, d.h. $X \equiv c$ ist fast sicher konstant. Dann ist

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = e^{ic\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

b) **Bernoulliverteilung.** $X \sim B(p) = p\delta_1 + q\delta_0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = pe^{i\xi\cdot 1} + qe^{i\xi\cdot 0} = q + pe^{i\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

c) **Zweipunktverteilung.** $X \sim p\delta_a + q\delta_b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = pe^{ia\xi} + qe^{ib\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Für $p = q = \frac{1}{2}$ und $b = -a$ erhalten wir insbesondere $\mathbb{E}e^{i\xi X} = \cos(a\xi)$.

d) **Poissonverteilung.** $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, d.h. $\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n \in \mathbb{N}_0$, wobei X nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt. Es gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = \exp\left[-\lambda(1 - e^{i\xi})\right], \quad \xi \in \mathbb{R}$$

.

e) **Gleichverteilung auf $[a, b]$.** $X \sim U[a, b]$, d.h. X hat die Dichte $(b-a)^{-1}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$. Es gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{i\xi x}\, dx = \frac{e^{ib\xi} - e^{ia\xi}}{i\xi(b-a)}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Für $a = -1, b = 1$ erhalten wir insbesondere $\mathbb{E}e^{i\xi X} = \dfrac{\sin\xi}{\xi}$.

f) **(Einseitige) Exponentialverteilung.** $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, d.h. X hat die Dichte $\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Es gilt

$$\mathbb{E}e^{i\xi X} = \lambda\int_0^\infty e^{i\xi x}e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Lemma 3.2.3 (Charakt. Fn. der Standardnormalverteilung). *Es sei $G \sim N(0,1)$ eine standard-normalverteilte ZV. Die charakteristische Funktion ist*

$$\mathbb{E}e^{i\xi G} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-x^2/2}\, dx = e^{-\xi^2/2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.2.4 (Eigenschaften der charakteristischen Funktion). *Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine ZV. Die charakteristische Funktion $\varphi_X(\xi) := \mathbb{E}e^{i\langle \xi, X\rangle}$ hat folgende Eigenschaften.*

a) $\xi \mapsto \varphi_X(\xi)$ *ist stetig.*

b) $|\varphi_X(\xi)| \le \varphi_X(0) = 1$.

c) $\varphi_{-X}(\xi) = \varphi_X(-\xi) = \overline{\varphi_X(\xi)}$.

d) $\Re[\varphi_X(\xi)] = \mathbb{E}\left[\cos\langle \xi, X\rangle\right]$ *ist die charakteristische Funktion der ZV $Y = \epsilon X$, wobei $\epsilon \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ und X unabhängig sind.*

e) $|\varphi_X|^2$ *ist die charakteristische Funktion der ZV $Y = X - \widetilde{X}$, wobei $\widetilde{X} \sim X$ und $X, \widetilde{X}$ unabhängige ZV sind.*

f) Wenn $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann existiert $\partial^\alpha \varphi_X$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le n$. Weiterhin ist $\partial^\alpha \varphi_X$ stetig und es gilt

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = i^{-|\alpha|}\, \partial^\alpha \varphi_X(0).$$

g) Wenn φ_X $2m$-mal an der Stelle $\xi = 0$ differenzierbar ist, dann ist $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ für alle $n \le 2m$. Insbesondere ist dann $\varphi_X \in C^{2m}(\mathbb{R}^d)$.

Satz 3.2.5 (Die Charakteristische Funktion charakterisiert). *Es seien $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, $(\Omega', \mathscr{A}', \mathbb{P}')$ zwei W-Räume, auf denen ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ und $X' : \Omega' \to \mathbb{R}^d$ definiert sind. Genau dann gilt $X \sim X'$, wenn X und X' die gleiche charakteristische Funktion haben: $\varphi_X \equiv \varphi_{X'}$.*

Korollar 3.2.6 (Satz von Kac). *Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}^d$ zwei ZV, die auf demselben W-Raum definiert sind. Es gilt $X \perp\!\!\!\perp Y$ genau dann, wenn*

$$\mathbb{E}e^{i\langle \xi, X\rangle + i\langle \eta, Y\rangle} = \mathbb{E}e^{i\langle \xi, X\rangle} \cdot \mathbb{E}e^{i\langle \eta, Y\rangle} \qquad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d.$$

Satz 3.2.7 (Umkehrformel). *Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine ZV, deren charakteristische Funktion $\varphi_X \in L^1(d\xi)$ integrierbar ist. Dann gilt $X \sim p_X(x)\, dx$, und die Dichte ist durch folgende Formel gegeben:*

$$p_X(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_X(\xi)\, e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

4 Konvergenz und Grenzverhalten

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

4.1 Konvergenz von Zufallsvariablen

Definition 4.1.1 (Konvergenzarten)**.** *Die ZV $X, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien auf demselben W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ definiert.*

a) X_n konvergiert gegen X **fast sicher***, wenn*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1.$$

Notation: $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *f.s.,* $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.

b) X_n konvergiert gegen X **in L^p***, $1 \le p \le \infty$, oder* **im p-ten Mittel***, wenn*

$$X_n, X \in L^p(\mathbb{P}) \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_{L^p} = 0.$$

Notation: $L^p\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$, $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

c) X_n konvergiert gegen X **stochastisch** *oder* **in Wahrscheinlichkeit***, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$$

Notation: $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n\to\infty} X_n = X$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

d) X_n konvergiert gegen X **schwach** *oder* **in Verteilung***, wenn*

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f(X_n) = \mathbb{E}f(X).$$

Notation: $X_n \xrightarrow{d} X$, $X_n \Rightarrow X$ *oder* $\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_X$.

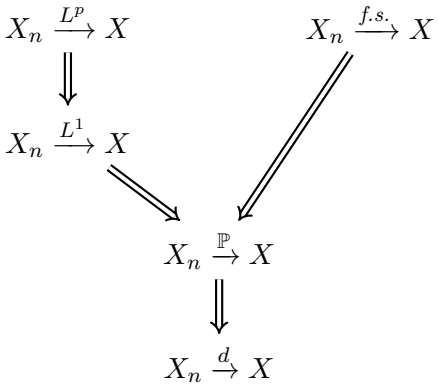
Lemma 4.1.2. *Die Limiten in 4.1.1 sind eindeutig (und damit wohldefiniert):*

$$X_n \xrightarrow{f.s./L^p/\mathbb{P}} X \quad \& \quad X_n \xrightarrow{f.s./L^p/\mathbb{P}} Y \quad \Longrightarrow \quad X = Y \text{ f.s.}$$

sowie

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \& \quad X_n \xrightarrow{d} Y \quad \Longrightarrow \quad X \sim Y$$

Lemma 4.1.3 (Konvergenzimplikationen)**.** *Für die ZV $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $1 \le p \le \infty$ gilt*



Lemma 4.1.4 (»schnelle« stoch. Konv. –> f.s. Konv.)**.** *Es seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV, so dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, und für eine Nullfolge $\epsilon_n \downarrow 0$ gelte $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon_n) < \infty$. Dann folgt $X_n \xrightarrow{f.s.} X$.*

Korollar 4.1.5. *Es seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV. Wenn $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, dann existiert eine Teilfolge $(X_{n(k)})_k \subset (X_n)_n$ mit $X_{n(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{f.s.} X$.*

Lemma 4.1.6. *Es seien $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV, die auf demselben (!) W-Raum definiert sind. Wenn X f.s. konstant ist, $X \equiv c$, dann gilt*

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \equiv c \quad \Longleftrightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} X \equiv c.$$

Satz 4.1.7 (Konvergenz in Verteilung)**.** *Es seien X_n, X reelle ZV, die nicht auf demselben W-Raum definiert sein müssen. Dann gilt*

$$X_n \xrightarrow{d} X \implies F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x) \quad \text{für alle Stetigkeitsstellen } x \text{ von } F_X.$$

Beispiel 4.1.8 (Gegenbeispiele)**.**

a) L^1-Konvergenz $\not\Longrightarrow$ L^p-Konvergenz ($p > 1$).

$$X_n(\omega) = \mathbb{1}_{[1/n,1)}(\omega)\, \omega^{-1/p}, \qquad X(\omega) = \omega^{-1/p}.$$

b) L^1-Konvergenz $\not\Longrightarrow$ f.s. Konvergenz.

$$X_{n,k}(\omega) = \mathbb{1}_{[k/n,(k+1)/n)}(\omega), \qquad n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

lexikografisch, also geordnet $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n-1}, X_{n+1,1}, \ldots$. Offensichtlich $X(\omega) \equiv 0$ in L^1, aber $X_{n,k}(\omega)$ konvergiert an keinem Punkt ω

c) Stochastische Konvergenz $\not\Longrightarrow$ L^1-Konvergenz.

$$X_n(\omega) = n\,\mathbb{1}_{[0,1/n]}(\omega), \qquad X(\omega) \equiv 0.$$

d) Stochastische Konvergenz $\not\Longrightarrow$ f.s. Konvergenz. Siehe Beispiel b).

e) Schwache Konvergenz $\not\Longrightarrow$ stochastische Konvergenz
Die Rademacher-Funktionen $R_n \sim \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ erfüllen $R_n \xrightarrow{d} R_1$, da $\mathbb{E}f(R_n)$ unabhängig von n ist. Sie konvergieren aber nicht f.s. (da $\liminf R_n = -1 < 1 = \limsup R_n$ auf ganz $(0,1)$), und wegen $\mathbb{P}(|R_n - R_k| > \epsilon) = \frac{1}{2}$ für $n \neq k$ auch nicht stochastisch.

Satz 4.1.9 (Lévy 1925)**.** *Es seien X, X_n ZV mit Werten in $\mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d : \varphi_{X_n}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X(\xi).$$

sogar lokal gleichmäßig.

4.2 Konvergenz & Null-Eins Gesetze

Satz 4.2.1 (Borel-Cantelli)**.** *Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$.*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(A_n \text{ für unendlich viele } n) = 0$

b) Wenn die A_n paarweise unabhängig sind, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(A_n \text{ für unendlich viele } n) = 1$$

Korollar 4.2.2. *Für die ZV $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ genau dann, wenn*

$$\forall \epsilon > 0 : \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon \text{ für unendlich viele } n) = 0.$$

Definition 4.2.3 (Terminale Sigma-Algebra)**.** *Es sei $(\mathscr{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengensystemen aus $\mathscr{A}$. Setze*

$$\mathscr{T}_n := \sigma(\mathscr{A}_n, \mathscr{A}_{n+1}, \dots) = \sigma\left(\bigcup_{i\geq n} \mathscr{A}_i\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

$\mathscr{T}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n$ heißt **terminale σ-Algebra**.

Beispiel 4.2.4. Es sei $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Für $n \geq m$ sehen wir, dass $\mathscr{T}_m \supset \mathscr{T}_n$. Daher ist

$$\limsup_{i\to\infty} A_i = \bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\bigcup_{i\geq n} A_i}_{\in \mathscr{T}_n} \overset{\forall m\in\mathbb{N}}{=} \bigcap_{n\geq m} \bigcup_{i\geq n} A_i \in \mathscr{T}_m$$

und somit gilt $\limsup_{i\to\infty} A_i \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_m = \mathscr{T}_\infty$.

Satz 4.2.5 (Kolmogorovsches 0–1–Gesetz)**.** *Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige reelle ZV und*

$$\mathscr{T}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_n, \qquad \mathscr{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots).$$

Für alle $A \in \mathscr{T}_\infty$ gilt $\mathbb{P}(A) = 0$ oder $\mathbb{P}(A) = 1$.

Korollar 4.2.6. *Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellen ZV und $\mathscr{T}_\infty$ die zugehörige terminale σ-Algebra. Jede ZV Y, die bezüglich $\mathscr{T}_\infty$ meßbar ist, ist f.s. konstant.*

4.3 Grenzwertsätze

Satz 4.3.1 (Maximalungleichung; Etemadi 1985)**.** *Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle ZV. Dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq 3t\right) \leq 3 \max_{1\leq k\leq n} \mathbb{P}(|S_k| \geq t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Satz 4.3.2 (Lévy)**.** *Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige reelle ZV. Dann gilt*

$$S_n \text{ konvergiert f.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad S_n \text{ konvergiert in Wahrscheinlichkeit.}$$

Korollar 4.3.3 (von Kolmogorov)**.** *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{P})$ unabhängige reelle ZV. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{V}X_i < \infty \implies \sum_{i=1}^{\infty} (X_i - \mathbb{E}X_i) \text{ konvergiert f.s.}$$

Satz 4.3.4 (Drei-Reihen-Satz; Kolmogorov)**.** *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige reelle ZV. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ konvergiert f.s. genau dann, wenn für ein (oder für alle) $K > 0$ die folgenden drei Reihen konvergieren:*

$$i)\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_i| > K) \qquad ii)\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}X_i^K \qquad iii)\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{V}X_i^K.$$

Satz 4.3.5 (Gesetz der kleinen Zahlen)**.** *Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von ZV, so dass $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X_i = 0) = q = 1 - p$, d.h. $X_i \sim B(p)$. Dann gilt*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p) \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Satz 4.3.6 (Poisson-Approximation)**.** *Auf dem W-Raum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ seien reelle binomialverteilte ZV $S_n \sim B(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda \in [0,\infty) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Satz 4.3.7 (Chebyshev; WLLN)**.** *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, abzählbar viele paarweise unkorrelierte ZV in $L^2(\mathbb{P})$. Wenn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}X_i = 0,$$

dann genügt $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dem **schwachen Gesetz der großen Zahlen (WLLN)***, d.h.*

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > \epsilon\right) = 0}_{\textit{Konvergenz in Wahrscheinlichkeit}} \qquad \forall \epsilon > 0$$

bzw.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i) \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } 0$$

Beweisidee.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right|^2 > (n\epsilon)^2\right)$$

$$\overset{1.1.7j)}{\leq} \frac{1}{(n\epsilon)^2}\,\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathbb{E}X_i)\right|^2\right) \overset{2.2.16}{=} \frac{1}{(n\epsilon)^2}\,\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$\overset{2.2.18}{=} \frac{1}{(n\epsilon)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}X_i \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

Bemerkung 4.3.8. Das schwache Gesetz der großen Zahlen 4.3.7 ist die mathematische Rechtfertigung dafür, Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten zu approximieren. Die Annahmen von Chebyshev sind allerdings noch nicht optimal. Es folgt die optimale Version in 4.3.9

Satz 4.3.9 (Khintchin)**.** *Es seien $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, abzählbar viele paarweise unabhängige und identisch verteilte ZV in $L^1(\mathbb{P})$. Dann gilt für die Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ das WLLN.*

Satz 4.3.10 (DeMoivre; Laplace; CLT)**.** *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reelle iid ZV und $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$. Weiter seien $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $\mu = \mathbb{E}X_1$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}X_1$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx = \Phi(b) - \Phi(a), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

der **zentrale Grenzwertsatz**, *wobei* $\Phi(y) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2}\,dx$.

Bemerkung 4.3.11. Der zentrale Grenzwertsatz, vermutlich das wichtigste Resultat der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, zeigt, dass eine normierte Reihe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz im Grenzverhalten normalverteilt sind – unabhängig davon, welche Verteilung die X_i ursprünglich hatten.

Satz 4.3.12 (SLLN; Kolmogorov 1933; Etemadi 1981)**.** *Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{P})$ paarweise unabhängige, identisch verteilte reelle ZV. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mathbb{E}X_1 \quad \textit{f.s.}$$

Bemerkung 4.3.13. Das SLLN liefert im Gegensatz zum WLLN **fast sichere** statt nur stochastische Konvergenz des Stichprobenmittels gegen $\mathbb{E}X_1$ – die theoretische Rechtfertigung der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsinterpretation.

5 Abhängige Prozesse

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

5.1 Bedingte Erwartungen

Definition 5.1.1 (Bedingte Erwartung)**.** *Es sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $X \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X \in L^{0,+}_{\mathbb{R}}(\mathscr{A})$. Die* **bedingte Erwartung** *von X bezüglich $\mathscr{F}$ ist eine $\mathscr{F}$-meßbare ZV $X^{\mathscr{F}} \in L^1(\mathscr{F})$ oder $X^{\mathscr{F}} \geq 0$ mit der Eigenschaft*

$$\forall F \in \mathscr{F} : \int_F X \, d\mathbb{P} = \int_F X^{\mathscr{F}} \, d\mathbb{P}.$$

oder äquivalent:

$$\forall F \in \mathscr{F} : \mathbb{E}(\mathbb{1}_F X) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_F X^{\mathscr{F}})$$

Wir bezeichnen außerdem mit

$$\mathbb{E}(X|F) = \int X(\omega)\mathbb{P}(d\omega|F) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_F X)}{\mathbb{P}(F)}$$

die bedingte Erwartung von X geg. $F \in \mathscr{A}$ und schreiben $E(X|\mathscr{F}) := X^{\mathscr{F}}$. Weiterhin heißt $P(A|\mathscr{F}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathscr{F})$ **bedingte Wahrscheinlichkeit**.

Satz 5.1.2. *Es sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $X \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X \in L^{0,+}_{\mathbb{R}}(\mathscr{A})$.*

a) Es seien $X^{\mathscr{F}}, Y^{\mathscr{F}}$ $\mathscr{F}$-meßbare ZV, die 5.1.1 erfüllen.
Dann gilt $X^{\mathscr{F}} = Y^{\mathscr{F}}$ f.s.

b) $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$ existiert.

Lemma 5.1.3 (Elementare Eigenschaften)**.** *Es seien $X, Y \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X, Y \in L^{0,+}_{\mathbb{R}}(\mathscr{A})$, $c \in \mathbb{R}$ und $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra.*

a) $X \geq 0 \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \geq 0$; *(positiv)*
$X \equiv c \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \equiv c$; *(konservativ)*

b) $\mathbb{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}X$;

c) $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})\right) = \mathbb{E}X$;

d) $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathscr{F}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F})$; *(linear)*
($a, b \in \mathbb{R}$ bzw. $a, b \geq 0$ wenn $X, Y \geq 0$);

e) $X \geq Y \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \geq \mathbb{E}(Y \mid \mathscr{F})$. *(monoton)*

Satz 5.1.4 (Konvergenzsätze)**.** *Es seien X, X_n reelle ZV und $\mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ eine σ-Algebra.*

a) (bed. Beppo Levi) Für $X_n \geq 0$, $X_n \uparrow X$ gilt

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \uparrow \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \quad \textit{fast sicher.}$$

b) (bed. Fatou) Für $X_n \geq 0$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathscr{F}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) \quad \textit{fast sicher.}$$

c) (bed. dom. Konvergenz) Wenn $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und $|X_n| \leq Y$ für ein $Y \in L^1(\mathbb{P})$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n \mid \mathscr{F}\right) = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \quad \textit{fast sicher.}$$

d) (bed. Jensen) Für $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathbb{E}|U(X)| < \infty$ gilt

$$U\left(\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})\right) \leq \mathbb{E}\left(U(X) \mid \mathscr{F}\right) \quad \textit{fast sicher.}$$

Insbesondere gilt für $U(x) = x^p$, $1 \leq p < \infty$: $\|\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})\|_{L^p} \leq \|X\|_{L^p}$.

Satz 5.1.5 (Besondere Eigenschaften)**.** *Es sei X eine ZV und Z eine $\mathscr{F}$-meßbare ZV, so dass entweder $X, XZ \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X, Z \geq 0$.*

a) (pull out) $\mathbb{E}(ZX \mid \mathscr{F}) = Z\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F})$.

b) (tower property) Wenn $\mathscr{G} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{A}$ σ-Algebren sind, dann ist

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) \mid \mathscr{G}\right] = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}).$$

c) (Projektion) Für $X \in L^2(\mathscr{A})$ und $Y \in L^2(\mathscr{F})$ gilt

$$\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[(X - Y)^2\right].$$

Lemma 5.1.6. *Es seien $X, Y \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X, Y \in L^{0,+}_{\mathbb{R}}(\mathscr{A})$ und $\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{G}) \subset \mathscr{A}$; weiter sei $\mathscr{G}$ $\cap$-stabil und enthalte eine Folge $(G_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$, $G_i \uparrow \Omega$, so dass $\int_{G_i} |X|\, d\mathbb{P} < \infty$ und $\int_{G_i} |Y|\, d\mathbb{P} < \infty$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) $\forall F \in \mathscr{F} : \int_F X\, d\mathbb{P} = \int_F Y\, d\mathbb{P}$;

b) $\forall G \in \mathscr{G} : \int_G X\, d\mathbb{P} = \int_G Y\, d\mathbb{P}$.

Insbesondere benötigen wir (14.3) nur auf einem »gutartigen« Erzeuger.

Beispiel 5.1.7. Sei X eine ZV und $\bigsqcup_{i\in I} F_i = \Omega$ eine disjunkte Zerlegung des Grundraums, $F_i \in \mathscr{A},\ I \subset \mathbb{N}$. Dann ist $\mathscr{F} := \sigma(F_i)_{i\in I} = \{\bigsqcup_{j\in J} F_j \mid J \subset I\}$ und

$$\mathbb{E}(X|\mathscr{F}) = \sum_{i\in I} \mathbb{1}_{F_i}\mathbb{E}(X|F_i)$$

Satz 5.1.8. *Es seien X, Y reelle ZV und $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subset \mathscr{A}$ σ-Algebren.*

a) Für $X \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X \geq 0$ gilt: $X \perp\!\!\!\perp \mathscr{F} \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}) = \mathbb{E}X$.

b) Für $X \in L^1(\mathscr{A})$ oder $X \geq 0$ gilt: $X, \mathscr{G} \perp\!\!\!\perp \mathscr{F} \implies \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}, \mathscr{F}) = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$.

Beispiel 5.1.9. Wenn $Y : \Omega \to \{y_1, y_2, \dots\}$ eine diskrete ZV ist, dann ist

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}(X \mid \{Y = y\}) = \begin{cases} \dfrac{\mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{y\}}(Y))}{\mathbb{P}(Y = y)}, & \mathbb{P}(Y = y) > 0, \\ 0, & \mathbb{P}(Y = y) = 0, \end{cases}$$

vgl. Beispiel 5.1.7 mit $\mathscr{G} = \sigma(\{Y = y_i\}, i \in \mathbb{N})$. Für nicht diskrete Probleme gilt diese Beziehung nicht mehr.

5.2 Martingale

Definition 5.2.1 (Filtration)**.** *Eine Filtration ist eine aufsteigende Familie von σ-Algebren $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$, $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}$, d.h.*

$$\forall s, t \in I, s \leq t : \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t.$$

Wir schreiben $\mathscr{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\in I} \mathscr{F}_t\right)$.

Definition 5.2.2 (Martingale)**.** *Es sei $(X_t)_{t\in I}$ eine Familie von ZV und $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ eine Filtration. Wenn*

a) $(X_t)_{t\in I}$ an $(\mathscr{F}_t)_{t\in I}$ adaptiert ist,

b) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ für alle $t \in I$ gilt,

c) $\mathbb{E}(X_t \mid \mathscr{F}_s) = X_s$ für alle $s \leq t$, $s, t \in I$ gilt,

dann heißt $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in I}$ **Martingal**. *Gilt stattdessen*

c') $\mathbb{E}(X_t \mid \mathscr{F}_s) \geq X_s$ *für alle* $s \leq t$, $s,t \in I$, *dann heißt* $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in I}$ **Submartingal**.

c") $\mathbb{E}(X_t \mid \mathscr{F}_s) \leq X_s$ *für alle* $s \leq t$, $s,t \in I$, *dann heißt* $(X_t, \mathscr{F}_t)_{t\in I}$ **Supermartingal**.

Bemerkung 5.2.3. Ein Submartingal »wächst«, ein Supermartingal »fällt«.

Lemma 5.2.4. *Es seien* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *reelle ZV und* $X_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$. *Dann gilt*

$$\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sigma(X_1, \ldots, X_n).$$

Beispiel 5.2.5. Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Folge. Dann ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \equiv (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich jeder Filtration in $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

b) **Random Walk/Summenmartingal.** Es sei $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathscr{A})$ eine Folge von integrierbaren iid ZV und $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann gilt für die Folge der Partialsummen $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $X_0 := 0$, $\mathscr{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$

$$X_n \text{ ist ein } \begin{cases} \text{Martingal} & \iff \mathbb{E}\xi_1 = 0; \\ \text{Submartingal} & \iff \mathbb{E}\xi_1 \geq 0; \\ \text{Supermartingal} & \iff \mathbb{E}\xi_1 \leq 0. \end{cases}$$

Das folgt sofort aus

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_{n-1}+\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \underbrace{\mathbb{E}(X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1})}_{\mathscr{F}_{n-1}\text{-mb.}} + \underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1})}_{\xi_n \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{n-1}} = X_{n-1}+\mathbb{E}\xi_n.$$

c) **Produktmartingal.** Es sei $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven iid ZV mit $\mathbb{E}\xi_1 = 1$ und $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Dann ist $X_n = \prod_{i=1}^n \xi_i$, $X_0 = 1$, $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ein Martingal:

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(X_{n-1}\cdot\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \overset{\text{pull out}}{=} X_{n-1} \underbrace{\mathbb{E}(\xi_n \mid \mathscr{F}_{n-1})}_{\xi_n \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_{n-1}} = X_{n-1}\mathbb{E}\xi_n = X_{n-1}.$$

Beweistaktiken

5.2.6 Konvergenzen

1. $\mathbb{P}$- Konvergenz löst meist das WLLN 4.3.7
2. L^1- Konvergenz löst meist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung 1.1.7 g) für $p = q = 2$ und $Y \equiv 1$ ($\mathbb{E}X \leq \sqrt{\mathbb{E}|X|^2}$), falls die Varianzen gegen 0 konvergieren.
3. f.s.- Konvergenz löst meist das SLLN 4.3.12
4. d-Konvergenz löst man mit der char. Funktion 4.1.9
5. Gesetz der kleinen Zahlen: Begründung für die Poisson-Approximation ist immer $n \gg 1$ und $0 < p \ll 1$, aber $n \cdot p_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. R. Schilling; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. R. Schilling; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.