mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

Numerik I

Vorlesungsskript – Wintersemester 2026/27
Leitung: Prof. O. Sander

Inhaltsverzeichnis

1 Interpolation **3**

1.1 Das Interpolationsproblem . . . 3
Definition 1.2 (Interpolationsproblem) . . . 3
1.3 Polynominterpolation . . . 3
Satz 1.4 (Existenz des Interpolationspolynoms) . . . 4
Satz 1.5 (Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms) . . . 4
1.6 Die Newton-Form des Interpolationspolynoms . . . 4
1.7 Interpolation stetiger Funktionen . . . 5
Definition 1.8 (Interpolation einer Funktion) . . . 5
Definition 1.9 (Interpolationsfehler) . . . 5
Satz 1.10 (Approximationssatz von Weierstraß) . . . 5
1.12 Der Interpolationsfehler . . . 5
Satz 1.13 (Fehlerdarstellung) . . . 5
1.14 Tschebyscheff-Polynome . . . 6
Definition 1.15 (Tschebyscheff) . . . 6
Lemma 1.16 (Drei-Term-Rekursion) . . . 7
Satz 1.17 (Minimalität) . . . 7
Bemerkung 1.18 (Wahl der Stützstellen) . . . 7

2 Splines **7**

2.1 Splinefunktionen . . . 7
Definition 2.2 (Spline) . . . 7
2.3 C^1-Interpolation . . . 8
2.5 Kubische C^2-Splines . . . 9
2.6 Fehlerabschätzung und Minimaleigenschaft . . . 9
Satz 2.7 (Fehlerabschätzung) . . . 9
Satz 2.8 (Alternative Fehlerabschätzung) . . . 9
Lemma 2.9 (Orthogonalität) . . . 10
Satz 2.10 (Minimaleigenschaft) . . . 10

3 Numerische Quadratur **11**

3.1 Quadratur durch Interpolation . . . 11
Satz 3.2 (Fundamentalsatz) . . . 11

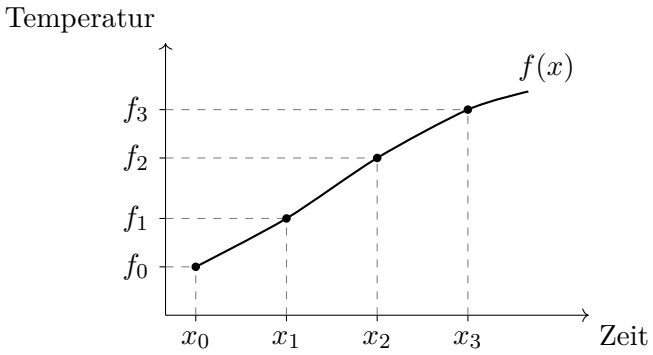
zul. geändert am 9. November 2026

3.4 Die Newton-Cotes-Formeln . . . 11
Definition 3.5 (Newton-Cotes-Formel) . . . 11
3.8 Der Quadraturfehler . . . 12
Satz 3.9 (Fehler der Simpson-Regel) . . . 12
Lemma 3.11 (Fehler der Trapezregel) . . . 13
Satz 3.12 (Fehler der Newton-Cotes-Formeln) . . . 13
3.14 Zusammengesetzte Quadraturformeln . . . 14
Satz 3.15 (Fehler der zusammengesetzten Regeln) . . . 14
3.16 Gauß-Quadratur . . . 15
3.17 Orthogonale Polynome . . . 15
Lemma 3.18 (Stützstellenpolynome) . . . 15
Definition 3.19 (Legendre-Polynome) . . . 16
Definition 3.21 (Gewichtsfunktion) . . . 16
Definition 3.22 (Gewichtetes Skalarprodukt) . . . 16
Satz 3.23 (Existenz von Orthogonalpolynomen) . . . 16
Satz 3.26 (Nullstellen von Orthogonalpolynomen) . . . 16
3.27 Gauß-Quadraturformeln . . . 17
Satz 3.28 (Exaktheit der Gauß-Quadratur) . . . 17
Satz 3.29 (Positivität der Gewichte) . . . 17

1 Interpolation

1.1 Das Interpolationsproblem

Motivation. Gegeben seien Temperaturen $f_0, f_1, f_2, \ldots$, gemessen zu bestimmten Zeitpunkten $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Wie groß ist die Temperatur $f(x)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $x \in \mathbb{R}$?



Gesucht ist eine „sinnvolle“ Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, mit

$$f(x_i) = f_i \quad \text{für alle } i.$$

Diese Eigenschaft nennen wir *Interpolation*.

Definition 1.2 (Interpolationsproblem)**.** *Gegeben seien*

- $n+1$ *paarweise verschiedene* **Stützstellen** $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *und*
- $n+1$ **Werte** $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$.

Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ eine Klasse von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das **Interpolationsproblem** *besteht darin, ein $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ zu finden mit*

$$f(x_i) = f_i \quad \textit{für alle } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Was heißt hier „sinnvoll“? Die Lösung soll in der gewählten Funktionenklasse *eindeutig* bestimmt sein, zum Beispiel in der Klasse der Polynome.

1.3 Polynominterpolation

Gesucht ist ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad höchstens n,

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

das die Interpolationsbedingung $p(x_i) = f_i$ für $i = 0, \ldots, n$ erfüllt.

Lagrange-Interpolation. Für $j = 0, \ldots, n$ definieren wir die **Lagrange-Basispolynome** $L_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$L_j(x) \coloneqq \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}.$$

Jedes L_j ist ein Polynom vom Grad n, und an den Stützstellen gilt die *Lagrange-Eigenschaft*

$$L_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Damit ist

$$p(x) \coloneqq \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$$

ein Polynom vom Grad höchstens n, und es gilt $p(x_k) = \sum_j f_j \delta_{jk} = f_k$. Also erfüllt p die Interpolationsbedingung.

Satz 1.4 (Existenz des Interpolationspolynoms)**.** *Zu $n+1$ beliebigen Datenpaaren $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ mit paarweise verschiedenen x_i existiert mindestens ein Polynom vom Grad höchstens n, das die Interpolationsbedingung erfüllt.*

Beweis. Das oben konstruierte Polynom $p(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j L_j(x)$ leistet das Gewünschte. □

Satz 1.5 (Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms)**.** *Das Interpolationspolynom vom Grad höchstens n ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien p und $\tilde{p}$ Interpolationspolynome vom Grad höchstens n. Dann ist $p - \tilde{p}$ ein Polynom vom Grad höchstens n, und an den Stützstellen gilt

$$(p - \tilde{p})(x_i) = p(x_i) - \tilde{p}(x_i) = f_i - f_i = 0, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Ein Polynom vom Grad höchstens n mit $n+1$ verschiedenen Nullstellen ist das Nullpolynom, also $p - \tilde{p} \equiv 0$. □

Aufwand. Die Auswertung eines L_j an einer Stelle x kostet $\mathcal{O}(n)$ Multiplikationen. Für $p(x)$ werden $n+1$ solche Auswertungen benötigt, insgesamt also $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen. Geht das schneller?

1.6 Die Newton-Form des Interpolationspolynoms

Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} p(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{l=0}^{k-1} (x - x_l). \end{aligned}$$

Wie wählt man die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_n$, damit p die gegebenen Daten interpoliert?
Aus $f_0 \overset{!}{=} p(x_0) = c_0$ folgt sofort $c_0 = f_0$. Seien nun $c_0, \ldots, c_{j-1}$ bereits bestimmt. Da alle Terme mit $k > j$ den Faktor $(x_j - x_j)$ enthalten, gilt

$$f_j \overset{!}{=} p(x_j) = c_0 + \sum_{k=1}^{j} c_k \prod_{l=0}^{k-1} (x_j - x_l),$$

also

$$c_j = \frac{f_j - \Big(c_0 + \sum_{k=1}^{j-1} c_k \prod_{l=0}^{k-1} (x_j - x_l)\Big)}{\prod_{l=0}^{j-1} (x_j - x_l)}.$$

Der Nenner ist ungleich null, weil die Stützstellen paarweise verschieden sind.

Aufwand. Die Berechnung aller c_j kostet $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen, sofern man die Produkte $\prod_{l=0}^{k-1}(x_j - x_l)$ schrittweise aufbaut. Auch das naive Auswerten von $p(x)$ kostet $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen. Umklammern hilft jedoch:

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)\Big(c_1 + (x - x_1)(c_2 + \ldots \\ + (x - x_{n-2})\big(c_{n-1} + (x - x_{n-1})\, c_n\big)\cdots\big)\Big).$$

Wertet man diesen Ausdruck von innen nach außen aus (**Horner-Schema**), so benötigt man nur $\mathcal{O}(n)$ Operationen.

1.7 Interpolation stetiger Funktionen

Mit $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ bezeichnen wir die Polynome vom Grad höchstens n. Das Interpolationsproblem lautet damit: Zu gegebenen $(x_i, f_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, finde ein $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ mit $p(x_i) = f_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$.

Definition 1.8 (Interpolation einer Funktion)**.** *Sei $f \in C([a,b])$ gegeben und $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Gesucht ist ein $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$.*

Definition 1.9 (Interpolationsfehler)**.** *Der* **Interpolationsfehler** *ist*

$$\|f - p\|_\infty \coloneqq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|.$$

Satz 1.10 (Approximationssatz von Weierstraß)**.** *Sei $f \in C([a,b])$. Dann existiert eine Folge von Polynomen $(p_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[x]$ mit $\deg(p_i) \leq i$, sodass*

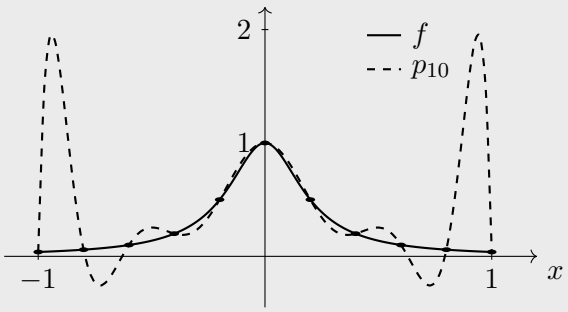
$$\|f - p_i\|_\infty \xrightarrow{i \to \infty} 0.$$

Beispiel 1.11. Für die sogenannte *Runge-Funktion*

$$f \colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

geht die Interpolation mit gleichverteilten Stützstellen ganz schön schief: Das Interpolationspolynom oszilliert zum Rand hin immer stärker. Merke: Gleichverteilte Stützstellen sind in der Numerik keine gute Idee.

ERGÄNZUNG



1.12 Der Interpolationsfehler

Wir verwenden die Hilfsfunktion

$$\omega(x) \coloneqq (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Satz 1.13 (Fehlerdarstellung)**.** *Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, und sei $p_n \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ das zugehörige Interpolationspolynom. Dann existiert für alle $x \in [a,b]$ ein $\xi_x \in (a,b)$, sodass*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\, \omega(x).$$

Insbesondere gilt

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!}\, |\omega(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \|\omega\|_\infty .$$

BEWEIS. *Fall 1:* $x = x_k$ für ein $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt $f(x) - p_n(x) = 0 = \omega(x)$.
Fall 2: $x \neq x_k$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$. Definiere die Hilfsfunktion

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(t) \coloneqq f(t) - p_n(t) - [f(x) - p_n(x)] \frac{\omega(t)}{\omega(x)}.$$

Dann ist $g \in C^{n+1}([a,b])$.
Wir verwenden den *Satz von Rolle*: Ist $g \in C^1$ mit zwei Nullstellen $x_0 \neq x_1$, so existiert ein $\xi \in (x_0, x_1)$ mit $g'(\xi) = 0$. Als Korollar folgt: Ist $g \in C^{n+1}$ mit $n+2$ Nullstellen, so existiert ein ξ mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$.
Zu zeigen ist also, dass g insgesamt $n+2$ Nullstellen hat. Für $t = x_k$, $k \in \{0, \dots, n\}$, gilt

$$g(x_k) = f(x_k) - p_n(x_k) - [f(x) - p_n(x)] \frac{\prod_{i=0}^n (x_k - x_i)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} = 0,$$

und für $t = x$ gilt

$$g(x) = f(x) - p_n(x) - [f(x) - p_n(x)] \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0}^n (x - x_i)} = 0.$$

Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $\xi \in (a,b)$ mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Es ist

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p_n^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - p_n(x)] \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} \left(\frac{\omega(t)}{\omega(x)} \right) \Big|_{t=\xi}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} \omega(t) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} \prod_{i=0}^n (t - x_i) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} (t^{n+1}) + \underbrace{\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} (\mathcal{O}(t^n))}_{=0} = (n+1)!.$$

Damit folgt

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - p_n(x)] \frac{(n+1)!}{\omega(x)},$$

also

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(x)$$

und schließlich

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \|\omega\|_\infty . \qquad \square$$

1.14 Tschebyscheff-Polynome

Für die Hilfsfunktion $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ ist

$$\|\omega\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |\omega(x)|.$$

Definition 1.15 (Tschebyscheff)**.** *Das n-te* **Tschebyscheff-Polynom** *ist*

$$T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

Ab jetzt sei $[a,b] = [-1,1]$. Dann gilt $|T_n(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1,1]$, und die Nullstellen von T_n sind

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n} \pi \right), \quad k = 1, \dots, n.$$

ERGÄNZUNG

Lemma 1.16 (Drei-Term-Rekursion)**.** *Es gilt* $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ *und*

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Insbesondere ist T_n *für* $n \geq 1$ *ein Polynom vom Grad* n *mit führendem Koeffizienten* 2^{n-1}.

BEWEIS. Setze $\theta = \arccos(x)$. Dann ist $T_0(x) = \cos(0) = 1$ und $T_1(x) = \cos(\theta) = x$. Aus dem Additionstheorem folgt

$$\cos\big((n+1)\theta\big) + \cos\big((n-1)\theta\big) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta),$$

also $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\,T_n(x)$. Per Induktion folgt daraus, dass T_n ein Polynom vom Grad n mit führendem Koeffizienten 2^{n-1} ist: Für $n = 1$ ist das klar, und der führende Term von $2x\,T_n$ ist $2 \cdot 2^{n-1}x^{n+1} = 2^n x^{n+1}$, während T_{n-1} kleineren Grad hat. □

Satz 1.17 (Minimalität)**.** *Das Tschebyscheff-Polynom* T_n *ist minimal bezüglich* $\max_{x\in[-1,1]}|T_n(x)|$ *unter allen Polynomen vom Grad* n *mit führendem Koeffizienten* 2^{n-1}.

ERGÄNZUNG

Bemerkung 1.18 (Wahl der Stützstellen)**.** Die Hilfsfunktion $\omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ ist ein Polynom vom Grad $n+1$ mit führendem Koeffizienten 1, also hat $2^n\omega$ den führenden Koeffizienten 2^n. Nach dem Minimalitätssatz gilt daher

$$\|\omega\|_\infty \geq 2^{-n}\,\|T_{n+1}\|_\infty = 2^{-n},$$

und Gleichheit gilt für $\omega = 2^{-n}\,T_{n+1}$, also wenn man als Stützstellen die Nullstellen von T_{n+1} wählt (**Tschebyscheff-Knoten**):

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\,\pi\right), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Für diese Wahl liefert die Fehlerdarstellung

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty.$$

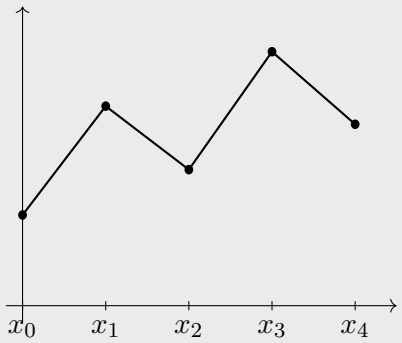
2 Splines

Fazit des letzten Abschnitts: Die Polynominterpolation ist doch keine so gute Wahl zur Approximation von Datensätzen. Sie ist zu aufwändig und liefert zu große Fehler. Wir verfolgen daher eine neue Idee.

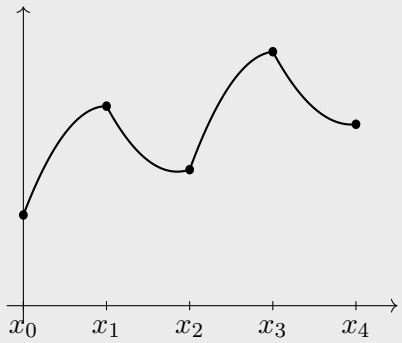
2.1 Splinefunktionen

Sei Δ eine Zerlegung von $[a, b]$, also $a = x_0 < \cdots < x_n = b$.

Definition 2.2 (Spline)**.** *Ein* **Spline** *vom Grad* m *mit Glattheit* l *zur Zerlegung* Δ *ist eine Funktion* $s \in C^l([a,b])$*, sodass für alle* $k = 0, \ldots, n-1$ *die Einschränkung* $s|_{[x_k, x_{k+1}]}$ *ein Polynom vom Grad höchstens* m *ist. Die Menge all dieser Splines bezeichnen wir mit* $\mathcal{S}_m^l(\Delta)$.



$m = 1,\ l = 0$



$m = 2,\ l = 0$

Links ein Spline aus $\mathcal{S}_1^0(\Delta)$ (stückweise linear), rechts einer aus $\mathcal{S}_2^0(\Delta)$ (stückweise quadratisch). Beide sind an den Stützstellen nur stetig, dort haben sie im Allgemeinen Knicke.

2.3 C^1-Interpolation

Gegeben seien Messwerte $f_0, f_1, \dots, f_n$ zu den Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$. Gesucht ist ein $s \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$ mit $s(x_i) = f_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.
Wir nehmen an, dass an den Stützstellen auch die Ableitungen $m_0, \dots, m_n$ gegeben sind. Auf $[x_k, x_{k+1}]$ machen wir den Ansatz

$$s_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k$$

und berechnen a_k, b_k, c_k, d_k aus $f_k, f_{k+1}, m_k, m_{k+1}$. Am linken Rand des Intervalls gilt

$$s_k(x_k) = \underbrace{[\dots]}_{=0} + d_k = f_k, \qquad s_k'(x_k) = \underbrace{[\dots]}_{=0} + c_k = m_k.$$

Mit $h_k \coloneqq x_{k+1} - x_k$ erhalten wir am rechten Rand

$$\begin{aligned} s_k(x_{k+1}) &= a_k h_k^3 + b_k h_k^2 + m_k h_k + f_k \overset{!}{=} f_{k+1}, \\ s_k'(x_{k+1}) &= 3a_k h_k^2 + 2b_k h_k + m_k \overset{!}{=} m_{k+1}. \end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für a_k und b_k:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_k^3 & h_k^2 \\ 3h_k^2 & 2h_k \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{k+1} - m_k h_k - f_k \\ m_{k+1} - m_k \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Wegen $\det A = 2h_k^4 - 3h_k^4 = -h_k^4 \neq 0$ existiert genau eine Lösung (a_k, b_k), nämlich

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{-h_k^4} \begin{pmatrix} 2h_k & -h_k^2 \\ -3h_k^2 & h_k^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k+1} - m_k h_k - f_k \\ m_{k+1} - m_k \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.4. *Es existiert genau ein Spline $s \in \mathcal{S}_3^1(\Delta)$ mit*

$$s_k(x_k) = f_k, \quad s_k'(x_k) = m_k, \quad s_k(x_{k+1}) = f_{k+1}, \quad s_k'(x_{k+1}) = m_{k+1}$$

für alle $k = 0, \dots, n-1$.

2.5 Kubische C^2-Splines

Für $s \in C^2$ muss zusätzlich

$$s_k''(x_{k+1}) = s_{k+1}''(x_{k+1}) \quad \text{für alle } k = 0, \dots, n-2$$

gelten. Wegen $s_k''(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k$ heißt das

$$s_k''(x_{k+1}) = 6a_k h_k + 2b_k = 2b_{k+1} = s_{k+1}''(x_{k+1}).$$

Nächstes Ziel: passende m_k finden. Die Lösung von $(*)$ ist

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{2}{h_k^3}(f_{k+1} - f_k) + \frac{1}{h_k^2}(m_k + m_{k+1}), \\ b_k &= \frac{3}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_k}(2m_k + m_{k+1}). \end{aligned}$$

Wir setzen dies in $6a_k h_k + 2b_k = 2b_{k+1}$ ein, also in $3a_k h_k + b_k = b_{k+1}$:

$$\begin{aligned} 3\Big(-\frac{2}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) + \frac{1}{h_k}(m_k + m_{k+1})\Big) + \frac{3}{h_k^2}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{h_k}(2m_k + m_{k+1}) \\ = \frac{3}{h_{k+1}^2}(f_{k+2} - f_{k+1}) - \frac{1}{h_{k+1}}(2m_{k+1} + m_{k+2}) \end{aligned}$$

$$\iff h_{k+1}m_k + 2(h_{k+1} + h_k)m_{k+1} + h_k m_{k+2} = \frac{3h_{k+1}}{h_k}(f_{k+1} - f_k) + \frac{3h_k}{h_{k+1}}(f_{k+2} - f_{k+1}).$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem mit $n-1$ Gleichungen und $n+1$ Unbekannten $m_0, \dots, m_n$. Zusätzlich braucht man Randbedingungen. Diese sind flexibel wählbar, zum Beispiel:

1. $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ (**natürliche Randbedingung**),
2. $s'(x_0) = m_0$ und $s'(x_n) = m_n$ sind bekannt (**vollständige Randbedingung**),
3. $s'(x_0) = s'(x_n)$ und $s''(x_0) = s''(x_n)$ (**periodische Randbedingung**); dabei setzt man $f_0 = f_n$ voraus.

2.6 Fehlerabschätzung und Minimaleigenschaft

Satz 2.7 (Fehlerabschätzung)**.** *Seien $f \in C^4([a,b])$ und $s \in \mathcal{S}_3^2(\Delta)$ die Interpolierende von f mit passenden Randbedingungen. Dann gilt*

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{5}{384}\, h^4 \left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

wobei $h \coloneqq \max_{k=0,\dots,n-1}(x_{k+1} - x_k)$.

Beweis. Ask a Toddler on the street. □

Alternativ gilt die folgende Abschätzung.

Satz 2.8 (Alternative Fehlerabschätzung)**.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 gilt*

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{1}{2}\, h^{3/2} \left\|f''\right\|_{L^2}.$$

Beweis. Sei $r := f - s$. Weil s an den $n+1$ Stützstellen f interpoliert, hat r mindestens $n+1$ Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle hat r' mindestens n Nullstellen. Benachbarte Nullstellen von r' sind höchstens $2h$ voneinander entfernt.
Weiterhin ist r' stetig auf $[a,b]$, also existiert ein $z \in [a,b]$ mit $|r'(z)| = \|r'\|_\infty$. Sei z_0 die z am nächsten gelegene Nullstelle von r'. Dann ist $|z_0 - z| \le h$, und mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|r'\|_\infty^2 = |r'(z)|^2 = |r'(z) - \underbrace{r'(z_0)}_{=0}|^2 = \Big|\int_{z_0}^{z} r''(x)\,\mathrm{d}x\Big|^2 \le \Big|\int_{z_0}^{z} |r''(x)|^2\,\mathrm{d}x\Big| \cdot \Big|\int_{z_0}^{z} 1^2\,\mathrm{d}x\Big| \le h\,\|r''\|_2^2 .$$

Nun ist r stetig, also existiert ein $y \in [a,b]$ mit $|r(y)| = \max_{x\in[a,b]}|r(x)|$. Sei y_0 die y am nächsten liegende Nullstelle von r. Dann ist $|y - y_0| \le h/2$ und

$$\|r\|_\infty = |r(y) - r(y_0)| = \Big|\int_{y_0}^{y} r'(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \|r'\|_\infty \Big|\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}x\Big| \le \frac{h}{2}\,\|r'\|_\infty \le \frac{h}{2}\sqrt{h}\,\|r''\|_2 .$$

Also gilt

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{1}{2}\,h^{3/2}\,\|f'' - s''\|_2 .$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\|f'' - s''\|_2 \le \|f''\|_2$.

Lemma 2.9 (Orthogonalität)**.** *Erfüllt s die natürliche oder die vollständige Randbedingung, so steht $f'' - s''$ L^2-senkrecht auf s'', d. h.*

$$\langle f'' - s'', s'' \rangle_{L^2} = 0.$$

Beweis. Mit partieller Integration ist

$$\langle f'' - s'', s'' \rangle = \int_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)\,\mathrm{d}x = (f' - s')s''\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b (f'(x) - s'(x))s'''(x)\,\mathrm{d}x}_{(*)} .$$

Da s''' auf jedem Teilintervall konstant ist, gilt

$$\begin{aligned}(*) &= \sum_{k=0}^{n-1} s'''\Big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f'(x) - s'(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} s'''\Big(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\Big) \underbrace{(f - s)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}}_{=0} = 0,\end{aligned}$$

da s interpoliert.
Nun kann man an s Randbedingungen stellen. Bei der natürlichen Randbedingung ($s'' = 0$ in a und b) wird der erste Term 0. Bei der vollständigen Randbedingung ($f' = s'$ in a und b) wird der erste Term ebenfalls 0. □

Somit ist $s'' \perp (f'' - s'')$, also auch $\|f'' - s''\|_2 \le \|f''\|_2$. Damit folgt

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{1}{2}\,h^{3/2}\,\|f''\|_2 .$$ □

Satz 2.10 (Minimaleigenschaft)**.** *Die $\mathcal{S}_3^2$-Interpolierende s minimiert $g \mapsto \|g''\|_2$ in der Menge aller C^2-Funktionen g, die die Interpolations- und Randbedingungen erfüllen.*

Beweis. Sei s der $\mathcal{S}_3^2$-Spline mit Randbedingungen. Angenommen, $\tilde{s} \in C^2$ mit $\tilde{s} \neq s$ interpoliert ebenfalls f, erfüllt die Randbedingungen und es gilt

$$\|\tilde{s}''\|_2 \le \|s''\|_2 .$$

Dann ist s die Interpolierende von $\tilde{s}$. Mit dem Lemma 2.9 gilt aber der Satz des Pythagoras

$$\|\tilde{s}''\|_2^2 = \|\tilde{s}'' - s''\|_2^2 + \|s''\|_2^2 .$$

Ergänzung

Wäre $\tilde{s}'' = s''$, so wäre $\tilde{s} - s$ linear mit Nullstellen in x_0 und x_n, also $\tilde{s} = s$. Daher ist $\|\tilde{s}'' - s''\|_2 > 0$.

Daraus folgt $\|s''\|_2 < \|\tilde{s}''\|_2$, ein Widerspruch. □

3 Numerische Quadratur

3.1 Quadratur durch Interpolation

Gegeben sei eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Gesucht ist

$$I(f) \coloneqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Satz 3.2 (Fundamentalsatz)**.** *Sei F eine Stammfunktion von f, also $F' = f$. Dann ist*

$$I(f) = F(b) - F(a).$$

Die Stammfunktion F ist aber häufig nicht bekannt oder schwierig zu handhaben.

Beispiel 3.3. Die Stammfunktion von $f(x) = e^{x^2}$ ist die *komplexe Fehlerfunktion*

$$F(x) = \operatorname{erfi}(x) \coloneqq \frac{\operatorname{erf}(ix)}{i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}.$$

Durch gliedweise Differentiation sieht man, dass F tatsächlich eine Stammfunktion ist.

Besser ist es daher, $I(f)$ numerisch, d. h. approximativ, zu berechnen.

Idee. Wir wissen, wie man Polynome integriert.

- Sei $\Delta = \{a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b\}$ eine Zerlegung des Integrationsgebiets.
- Sei p_n das dazugehörige Interpolationspolynom von f.
- Approximiere
$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{durch} \qquad Q_n(f) \coloneqq \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Mit der Lagrange-Form $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$ ergibt Einsetzen

$$Q_n(f) = \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^n f(x_k)\, a_k$$

mit reellen Koeffizienten (**Gewichten**) $a_k \coloneqq \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x$, die nicht von f abhängen.
Wie genau ist diese Approximation? Wir ahnen schon, dass es von der Verteilung der Stützstellen abhängt.

3.4 Die Newton-Cotes-Formeln

Definition 3.5 (Newton-Cotes-Formel)**.** *Sei $h \coloneqq \frac{b-a}{n}$ und $x_k \coloneqq a + hk$ für $k = 0, \ldots, n$. Die dazugehörige Quadraturformel Q_n heißt* **(abgeschlossene) Newton-Cotes-Formel**.

(Roger Cotes, 1682–1716, englischer Mathematiker.) Wichtige Spezialfälle sind die Trapezregel und die Simpson-Regel.

Beispiel 3.6 (Trapezregel, $n = 1$)**.** Die Stützstellen sind $x_0 = a$ und $x_1 = b$, also $h = b - a$. Die Lagrange-Polynome sind

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{h}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{h}.$$

Für ihre Integrale gilt

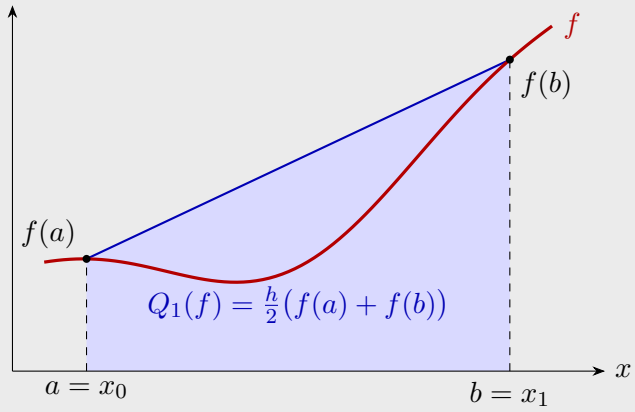
$$\int_a^b L_0(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\int_a^b (b - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{h}\Big(bx - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_a^b = \frac{1}{h}\Big[b^2 - \frac{b^2}{2} - ab + \frac{a^2}{2}\Big] = \frac{1}{2h}(b-a)^2 = \frac{h}{2}$$

und ebenso $\int_a^b L_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}$. Also ist

$$Q_1(f) = f(x_0)\int_a^b L_0(x)\,\mathrm{d}x + f(x_1)\int_a^b L_1(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}f(x_0) + \frac{h}{2}f(x_1).$$

Das folgende Bild illustriert den Namen „Trapezregel“.

ERGÄNZUNG



Die Trapezregel ersetzt die Fläche unter dem Graphen von f durch die Fläche des Trapezes unter der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.

Beispiel 3.7 (Simpson-Regel, $n = 2$)**.** Für $h = \frac{b-a}{2}$ ist

$$Q_2(f) = \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2).$$

3.8 Der Quadraturfehler

Satz 3.9 (Fehler der Simpson-Regel)**.** *Sei $f \in C^4([a,b])$ und $h = \frac{b-a}{2}$. Dann ist*

$$|Q_2(f) - I(f)| \le \frac{1}{12}\,h^5 \left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

Bemerkung 3.10. Die Standardinterpretation ist: Polynome vom Grad ≤ 3 werden exakt integriert. Bei Deuflhard und Hohmann (Lemma 9.7) findet sich ein alternativer Beweis, der sogar das stärkere Resultat $|Q_2(f) - I(f)| \le \frac{1}{90}\,h^5 \left\|f^{(4)}\right\|_\infty$ zeigt.

BEWEIS. Wir benutzen die Hilfsfunktion ω aus Satz 1.13 für die Stützstellen a, x_1, b:

$$\omega(x) := (x-a)(x-x_1)(x-b) = (y+h)\,y\,(y-h) \quad \text{mit } y := x - x_1.$$

Ihr Integral ist

$$\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} (y+h)\,y\,(y-h)\,\mathrm{d}y = 0,$$

da der Integrand ungerade ist. Nach Satz 1.13 zum Interpolationsfehler von p_2 existiert für jedes $x \in [a,b]$ ein $\xi_x \in (a,b)$, sodass

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}\,\omega(x).$$

Wir integrieren über $[a,b]$ und addieren eine Null:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b [f(x)-p_2(x)]\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\int_a^b \Big[\frac{1}{6}f'''(x_1)\,\omega(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_x)\,\omega(x) - \frac{1}{6}f'''(x_1)\,\omega(x)\Big]\,\mathrm{d}x\Big| \\
&= \frac{1}{6}\Big|f'''(x_1)\underbrace{\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \int_a^b \big(f'''(\xi_x) - f'''(x_1)\big)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\le \frac{1}{6}\max_{\xi\in[a,b]}\big|f'''(\xi) - f'''(x_1)\big| \int_a^b |\omega(x)|\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da $f \in C^4$, existiert nach dem Mittelwertsatz für jedes $x \in [a,b]$ ein $\zeta \in (a,b)$, sodass

$$|f'''(x) - f'''(x_1)| = |f^{(4)}(\zeta)|\,\underbrace{|x-x_1|}_{\le h} \le h\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

Für das Integral des Betrags der Hilfsfunktion gilt

$$\int_a^b |\omega(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \big|(y+h)\,y\,(y-h)\big|\,\mathrm{d}y = -2\int_0^h (y^2-h^2)\,y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,h^4.$$

Deshalb ist

$$|Q_2(f) - I(f)| = \Big|\int_a^b [f(x)-p_2(x)]\,\mathrm{d}x\Big| \le \frac{1}{6}\,h\left\|f^{(4)}\right\|_\infty \underbrace{\int_a^b |\omega(x)|\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{2}h^4} = \frac{1}{12}\,h^5\left\|f^{(4)}\right\|_\infty. \qquad \square$$

Ähnlich zeigt man:

Lemma 3.11 (Fehler der Trapezregel)**.** *Sei $f \in C^2([a,b])$. Für die Trapezregel Q_1 gilt*

$$|Q_1(f) - I(f)| \le \frac{1}{12}\,h^3\,\|f''\|_\infty.$$

Wir haben also:

$Q_1 \to h^3$	Trapezregel
$Q_2 \to h^5$	Simpson-Regel
$Q_3 \to h^?$	$n=3$ (Simpsons $\frac{3}{8}$-Regel)

Liefert Q_3 vermutlich die Konvergenzordnung h^7?

Satz 3.12 (Fehler der Newton-Cotes-Formeln)**.** *Sei Q_n die n-te Newton-Cotes-Formel.*

(a) Ist n gerade und $f \in C^{n+2}([a,b])$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$, sodass

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Ist n ungerade und $f \in C^{n+1}([a,b])$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$, sodass

$$I(f) - Q_n(f) = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,\mathrm{d}t.$$

Bemerkung 3.13. Nur beim Übergang von ungerader zu gerader Ordnung gewinnt man also tatsächlich etwas. Im Prinzip könnte man Formeln immer höherer Ordnung nehmen und würde immer genauere Approximationen bekommen.
Ab $n \geq 7$ bekommt man aber teilweise negative Gewichte, d. h. in

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, a_k, \qquad a_k \coloneqq \int_a^b L_k(x)\,\mathrm{d}x,$$

ist $a_k < 0$ für manche k. Quadraturformeln mit negativen Gewichten erhalten nicht die Monotonie des Integrals:

$$\text{Aus } f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in (a,b) \text{ folgt } \int_a^b f\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Deshalb verwendet man im Allgemeinen nur Newton-Cotes-Formeln bis $n = 6$.

3.14 Zusammengesetzte Quadraturformeln

Man verwendet **summierte** (engl. *composite*) Regeln.

ERGÄNZUNG

Sei $h \coloneqq \frac{b-a}{n}$, $x_i \coloneqq a + ih$ für $i = 0, \ldots, n$ und $x_{i-1/2} \coloneqq x_i - \frac{h}{2}$ der Mittelpunkt von $[x_{i-1}, x_i]$.

- Die **zusammengesetzte Trapezregel** ist

$$T_n(f) \coloneqq h\Big(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\Big).$$

- Die **zusammengesetzte Simpson-Regel** ist

$$S_n(f) \coloneqq h\Big(\frac{1}{6}f(x_0) + \frac{4}{6}f(x_{1/2}) + \frac{2}{6}f(x_1) + \frac{4}{6}f(x_{3/2}) + \frac{2}{6}f(x_2) + \cdots + \frac{2}{6}f(x_{n-1}) + \frac{4}{6}f(x_{n-1/2}) + \frac{1}{6}f(x_n)\Big).$$

Satz 3.15 (Fehler der zusammengesetzten Regeln)**.** *(i) Für alle $f \in C^2([a,b])$ gilt*

$$|T_n(f) - I(f)| \leq \frac{b-a}{12}\, h^2 \left\|f''\right\|_\infty.$$

(ii) Für alle $f \in C^4([a,b])$ gilt

$$|S_n(f) - I(f)| \leq \frac{b-a}{180}\, h^4 \left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

BEWEIS. Wir zeigen nur (i). Sei i eines der n Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ und $T_{n,i}$ der zugehörige Summand der Trapezregel. Nach Satz 3.12 (b) mit $n = 1$ existiert ein $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, sodass

$$T_{n,i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h^3}{12} f''(\xi_i).$$

Summation über alle Teilintervalle ergibt wegen $h = \frac{b-a}{n}$

$$T_n(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\Big(T_{n,i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{12} f''(\xi_i) = \frac{(b-a)\,h^2}{12} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Es ist

$$\min_{x\in[a,b]} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \max_{x\in[a,b]} f''(x).$$

Da f'' stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$ mit $f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$. Also ist

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{b-a}{12}\,h^2 f''(\xi)\right| \le \frac{b-a}{12}\,h^2\,\|f''\|_\infty . \qquad \square$$

3.16 Gauß-Quadratur

Die Newton-Cotes-Formeln approximieren

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{durch} \qquad \int_a^b p_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei p_n das Interpolationspolynom n-ten Grades *für gleichverteilte Stützstellen* ist. Diese Approximation ist exakt für alle Polynome vom Grad höchstens n. Bekannt ist:

- Gleichverteilte Stützstellen sind nicht optimal für die Polynominterpolation.
- Können wir mit anderen Stützstellen genauer integrieren?
- Idealerweise:
  (a) Wir haben $2n+2$ Freiheitsgrade ($n+1$ Gewichte und $n+1$ Positionen).
  (b) Ein Polynom vom Grad $2n+1$ hat $2n+2$ Koeffizienten.

Hoffnung: Können wir eine Quadraturformel konstruieren, die Polynome vom Grad $2n+1$ exakt integriert?
Aber: Die Positionen der Stützstellen gehen nichtlinear in den Fehler der Quadraturformel ein. Deshalb reicht ein simples Abzählen der Freiheitsgrade nicht aus.

Gauß-Legendre-Quadratur. Die „Geheimwaffe“ sind orthogonale Polynome. Das sind Familien von Polynomen

$$p_0, p_1, p_2, \ldots \qquad \text{mit } p_i \in \mathbb{R}[x]_{\le i},$$

die paarweise orthogonal sind.

3.17 Orthogonale Polynome

Ein Beispiel für ein Skalarprodukt auf Polynomen ist das **L^2-Skalarprodukt**

$$\langle p, q\rangle_{L^2} \coloneqq \int_a^b p(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 3.18 (Stützstellenpolynome)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei Q_n eine Quadraturformel mit Stützstellen $x_{0,n} < x_{1,n} < \cdots < x_{n,n}$ und Gewichten $a_{0,n}, \ldots, a_{n,n}$. Für jedes n definiere*

$$p_{n+1}(x) \coloneqq (x - x_{0,n})(x - x_{1,n}) \cdots (x - x_{n,n}).$$

Ist Q_n exakt für alle Polynome aus $\mathbb{R}[x]_{\le 2n+1}$, so steht p_{n+1} L^2-senkrecht auf allen Polynomen niedrigeren Grades, also

$$p_{n+1} \perp_{L^2} p_n, p_{n-1}, p_{n-2}, \ldots$$

Gilt dies für alle n, so sind alle p_i paarweise orthogonal, d. h. $p_i \perp_{L^2} p_j$ für alle $i \neq j$.

Beweis. Sei $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Dann ist $q \cdot p_{n+1} \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2n+1}$, also

$$\langle q, p_{n+1} \rangle_{L^2} = \int_a^b q(x)\, p_{n+1}(x)\, \mathrm{d}x = Q_n(q \cdot p_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}\, q(x_{k,n}) \underbrace{p_{n+1}(x_{k,n})}_{=0} = 0. \qquad \square$$

Definition 3.19 (Legendre-Polynome)**.** *Die L^2-orthogonale Familie von Polynomen auf $[-1,1]$ mit der Normierung $p_n(1) = 1$ heißt* **Legendre-Polynome**.

Beispiel 3.20. Die ersten Legendre-Polynome sind

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Gewichtete Integrale.

Definition 3.21 (Gewichtsfunktion)**.** *Eine Funktion $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $w(x) \geq 0$ auf $[a,b]$ und $w(x) > 0$ auf (a,b) heißt* **Gewichtsfunktion**.

Ziel: Approximiere

$$I(f,w) \coloneqq \int_a^b w(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \qquad \text{durch} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k).$$

Der Fehler der Approximation soll *nicht* von w abhängen.

Definition 3.22 (Gewichtetes Skalarprodukt)**.** *Das* **gewichtete L^2-Skalarprodukt** *ist*

$$\langle f, g \rangle_w \coloneqq \int_a^b w(x)\, f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Satz 3.23 (Existenz von Orthogonalpolynomen)**.** *Für jede Gewichtsfunktion w existiert eine eindeutig bestimmte Familie von w-Orthogonalpolynomen mit führendem Koeffizienten 1. Die Polynome genügen der Dreitermrekursion*

$$p_k(x) = (x + \alpha_k)\, p_{k-1}(x) + \beta_k\, p_{k-2}(x), \qquad p_0 \coloneqq 1, \quad p_{-1} \coloneqq 0,$$

mit

$$\alpha_k \coloneqq -\frac{\langle x p_{k-1}, p_{k-1} \rangle_w}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle_w}, \qquad \beta_k \coloneqq -\frac{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle_w}{\langle p_{k-2}, p_{k-2} \rangle_w},$$

für $k \geq 1$, wobei β_1 beliebig gesetzt werden kann, da $p_{-1} = 0$.

Beispiel 3.24.

- $w = 1$ liefert die Legendre-Polynome.
- $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $[-1,1]$ liefert die Tschebyscheff-Polynome.
- $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ mit $\alpha, \beta > -1$ liefert die Jacobi-Polynome.

Ergänzung

Bemerkung 3.25. Das Tschebyscheff-Gewicht ist in ± 1 nicht definiert, ebenso das Jacobi-Gewicht für $\alpha < 0$ oder $\beta < 0$. Diese Gewichte passen also nicht wörtlich zur Definition der Gewichtsfunktion als Funktion $w\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Satz 3.26 (Nullstellen von Orthogonalpolynomen)**.** *Das Orthogonalpolynom $p_k \in \mathbb{R}[x]_{\leq k}$ hat genau k einfache Nullstellen in (a,b).*

Beweis. Seien $\xi_1, \dots, \xi_m$ die m verschiedenen Punkte in (a,b), an denen p_k sein Vorzeichen wechselt. Zu zeigen ist $m \geq k$. Definiere

$$q(x) \coloneqq (x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_m).$$

Das Produkt $q\,p_k$ wechselt sein Vorzeichen in (a,b) gar nicht. Daraus folgt

$$\langle q, p_k\rangle_w = \int_a^b w(x)\,q(x)\,p_k(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Also hat q mindestens den Grad k, d. h. $m \geq k$. □

3.27 Gauß-Quadraturformeln

Sei wieder $Q_{n,w}(f) = \sum_{k=0}^n a_k\,f(x_k)$. Definiere

$$a_k \coloneqq \int_a^b w(x)\,L_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dann ist $Q_{n,w}(f) = \int_a^b w(x)\,p_{\mathrm{int}}(x)\,\mathrm{d}x$.

Satz 3.28 (Exaktheit der Gauß-Quadratur)**.** *Seien die Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ die Nullstellen des Orthogonalpolynoms p_{n+1}, und sei $Q_{n,w}(f) \coloneqq \sum_{k=0}^n a_k\,f(x_k)$. Dann gilt:*

$$Q_{n,w} \text{ exakt auf } \mathbb{R}[x]_{\leq n} \quad\Longrightarrow\quad Q_{n,w} \text{ exakt auf } \mathbb{R}[x]_{\leq 2n+1}.$$

Beweis. Sei $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2n+1}$. Polynomdivision durch p_{n+1} ergibt $p = q\,p_{n+1} + r$ mit $q, r \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b w(x)\,p(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\int_a^b w(x)\,q(x)\,p_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x}_{=\langle q, p_{n+1}\rangle_w = 0} + \int_a^b w(x)\,r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= Q_{n,w}(r) = \sum_{k=0}^n a_k\,r(x_k) \\
&= \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\big[r(x_k) + q(x_k)\,p_{n+1}(x_k)\big]}_{=p(x_k)} = \sum_{k=0}^n a_k\,p(x_k) = Q_{n,w}(p).
\end{aligned}$$

□

Satz 3.29 (Positivität der Gewichte)**.** *Alle Gewichte a_k einer Gauß-Quadraturformel sind positiv.*

Beweis. Wähle eine Stützstelle x_k und definiere

$$q(x) \coloneqq \Big(\frac{p_{n+1}(x)}{x - x_k}\Big)^2 = (x-x_0)^2\cdots(x-x_{k-1})^2\,(x-x_{k+1})^2\cdots(x-x_n)^2.$$

Ergänzung

Da q den Grad $2n$ hat, integriert $Q_{n,w}$ das Polynom q exakt.

Es folgt

$$\int_a^b w(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x = Q_{n,w}(q) = \sum_{i=0}^n a_i\,q(x_i) = a_k\,q(x_k),$$

sodass

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x}{q(x_k)} > 0.$$

□

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. O. Sander; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. O. Sander; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.