mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

Geometrie I

Vorlesungsskript – Wintersemester 2026/27
Leitung: Prof. P. Hornung

Inhaltsverzeichnis

Überblick **3**

1 Der Satz über inverse Funktionen **3**

1.1 Differentialrechnung auf Banachräumen . . . 3
Definition 1.2 (Banachraum) . . . 3
Definition 1.4 (Linearer Operator) . . . 3
Definition 1.6 (Differenzierbarkeit) . . . 3
Satz 1.8 (Kettenregel) . . . 4
Definition 1.10 (Höhere Ableitungen) . . . 4
Lemma 1.13 (Mittelwertsatz) . . . 5
1.14 Inverse und implizite Funktionen . . . 5
Satz 1.15 (über inverse Funktionen) . . . 5
Satz 1.16 (vom lokalen Inversen) . . . 5
Lemma 1.18 (Neumannsche Reihe) . . . 7
Definition 1.20 (Diffeomorphismus) . . . 7
Definition 1.21 (Regulärer Wert) . . . 8
Satz 1.23 (über implizite Funktionen) . . . 8
Satz 1.24 (über Submersionen) . . . 9

2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^p$ **9**

2.1 Definition und Charakterisierung . . . 9
Definition 2.2 (Untermannigfaltigkeit) . . . 9
2.6 Beispiele . . . 10
2.11 Konstruktion von Untermannigfaltigkeiten . . . 11
Proposition 2.12 (Konstruktionen) . . . 11

3 Mannigfaltigkeiten **12**

3.1 Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . 12
Definition 3.2 (Hausdorff-Raum) . . . 12
Definition 3.3 (Topologische Mannigfaltigkeit) . . . 13
Definition 3.4 (Atlas) . . . 13
Definition 3.7 (Äquivalente Atlanten) . . . 13
Definition 3.8 (Differenzierbare Struktur) . . . 13

zul. geändert am 10. November 2026

Proposition 3.10 (Produktmannigfaltigkeit) . . . 13
3.11 Topologische Eigenschaften . . . 14
Proposition 3.12 (Lokale Kompaktheit) . . . 14
Proposition 3.13 (Zusammenhang) . . . 14
3.16 Beispiele differenzierbarer Strukturen . . . 15
Proposition 3.18 (Projektiver Raum) . . . 16
Lemma 3.19 (Hausdorff-Eigenschaft) . . . 16
3.21 Differenzierbare Abbildungen . . . 16
Definition 3.22 (Differenzierbare Abbildung) . . . 16
Definition 3.24 (Diffeomorphie) . . . 16
Definition 3.27 (Immersion und Submersion) . . . 17

4 Der Tangentialraum **17**

4.1 Tangentialraum von Untermannigfaltigkeiten . . . 17
4.4 Tangentialraum von Mannigfaltigkeiten . . . 17
Definition 4.6 (Tangentialraum) . . . 17

5 Vektorfelder und Flüsse **18**

5.1 Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$ . . . 18
Definition 5.2 (Vektorfeld) . . . 18
Definition 5.3 (Integralkurve) . . . 18
Definition 5.4 (Fluss) . . . 18
Satz 5.5 (lokale Existenz eines Flusses) . . . 18

Überblick

Die Vorlesung gliedert sich in folgende Kapitel:

1. Satz über inverse Funktionen auf Banachräumen
2. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten: Untermannigfaltigkeiten, Mannigfaltigkeiten, Tangentialraum, Vektorfelder
3. Differentialrechnung auf Mannigfaltigkeiten: Differentialformen, Orientierung
4. Satz von Stokes
5. Riemannsche Geometrie: Kurven und Flächen im $\mathbb{R}^n$

Literatur.

- M. P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*
- *Riemannian Geometry*
- B. O'Neill: *Elementary Differential Geometry*
- P. Petersen
- J. M. Lee
- O. Forster: *Analysis 3*

1 Der Satz über inverse Funktionen

1.1 Differentialrechnung auf Banachräumen

Definition 1.2 (Banachraum)**.** *Ein* **Banachraum** *ist ein vollständiger normierter Vektorraum* $(V, \|\cdot\|)$*.*

Beispiel 1.3.
- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
- $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit der Supremumsnorm $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|g(t)|$

Definition 1.4 (Linearer Operator)**.** *Seien E, F Banachräume. Eine lineare Abbildung $T\colon E \to F$ heißt* **(linearer) Operator***. Ein linearer Operator $T\colon E \to F$ heißt* **beschränkt** *oder* **stetig***, wenn ein $C > 0$ existiert, sodass*

$$\|Tx\|_F \le C\,\|x\|_E \quad \text{für alle } x \in E.$$

Das kleinste solche C heißt **Operatornorm** *von T und wird mit $\|T\|_{L(E,F)}$ bezeichnet. Formal ist*

$$\|T\|_{L(E,F)} \coloneqq \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Tx\|_F\,,$$

wobei die zweite Gleichheit aus der Homogenität von Norm und T folgt.

Bemerkung 1.5. Der Raum $L(E,F)$ der beschränkten linearen Operatoren $E \to F$ ist, versehen mit der Operatornorm, ein Banachraum. Dafür genügt bereits, dass F vollständig ist.

Ergänzung

Definition 1.6 (Differenzierbarkeit)**.** *Seien E, F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f\colon U \to F$ und $a \in U$. Die*

Abbildung f heißt **(Fréchet-)differenzierbar in** *a, wenn es ein $A \in L(E,F)$ gibt mit*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

In diesem Fall ist A eindeutig und heißt **Differential** *$Df(a) \coloneqq A$ von f in a. Ist f in jedem Punkt von U differenzierbar und ist $Df\colon U \to L(E,F)$, $a \mapsto Df(a)$, stetig, so heißt f* **stetig differenzierbar** *auf U. Man schreibt dann $f \in C^1(U;F)$.*

Bemerkung 1.7. Ist $E = \mathbb{R}^n$, so gilt $f \in C^1(U;F)$ genau dann, wenn für jedes $a \in U$ die **partiellen Ableitungen**

$$\partial_i f(a) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(a+he_i)-f(a)), \quad i = 1,\dots,n,$$

existieren und die Abbildungen $a \mapsto \partial_i f(a)$ für alle i stetig sind, d. h. wenn f *stetig partiell differenzierbar* ist. Ist zudem $F = \mathbb{R}^m$, so gilt $Df(a)\,h = \nabla f(a)\,h$ mit der **Jacobi-Matrix**

$$\nabla f(a) \coloneqq \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix}.$$

Satz 1.8 (Kettenregel)**.** *Seien X, Y, Z normierte Räume und $U \subset X$, $V \subset Y$ offen. Seien $f\colon U \to Y$ mit $f(U) \subset V$ und $g\colon V \to Z$ differenzierbar in $x_0 \in U$ bzw. in $f(x_0) \in V$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 mit*

$$D(g\circ f)(x_0) = Dg\big(f(x_0)\big) \circ Df(x_0).$$

Insbesondere ist $g \circ f$ stetig differenzierbar, falls f und g stetig differenzierbar sind.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Korollar 1.9. *Ist $f\colon U \to V$ differenzierbar in $x_0 \in U$ und existiert $f^{-1}\colon V \to U$ und ist differenzierbar in $f(x_0) \in V$, so gilt*

$$D(f^{-1})\big(f(x_0)\big) = \big(Df(x_0)\big)^{-1}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 1.10 (Höhere Ableitungen)**.** *Sei $f \in C^1(U;Y)$. Wir sagen, f ist* **zweimal stetig differenzierbar**, *$f \in C^2(U;Y)$, falls die Abbildung $Df\colon U \to L(X,Y)$ stetig differenzierbar ist. Ähnlich definieren wir die Räume $C^k(U;Y)$ der k-***mal stetig differenzierbaren** *Funktionen sowie*

$$C^\infty(U;Y) \coloneqq \bigcap_{k\geq 1} C^k(U;Y).$$

Bemerkung 1.11. Ist $f \in C^2(U;Y)$, so ist der Hesse-Operator $D^2 f(x_0)$ symmetrisch.

Ergänzung

Das heißt, $D^2 f(x_0)(h,k) = D^2 f(x_0)(k,h)$ für alle $h, k \in X$.

Beispiel 1.12. „Abtrennbare“ Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind ein wichtiges Beispiel von C^∞-Abbildungen.

Lemma 1.13 (Mittelwertsatz)**.** *Sei $f\colon U \to Y$ differenzierbar und liege das verallgemeinerte Intervall*

$$I \coloneqq \{x_0 + \lambda h : 0 \le \lambda \le 1\}$$

in der offenen Menge U. Dann gilt

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \le \sup_{\xi \in I} \|Df(\xi)\| \cdot \|h\|.$$

Beweis. Wähle ein stetiges lineares Funktional $y' \in Y'$ mit $\|y'\| = 1$ und

$$y'\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = \|f(x_0+h) - f(x_0)\|.$$

Ein solches y' existiert nach dem Satz von Hahn-Banach. Wende nun den klassischen Mittelwertsatz auf die Hilfsfunktion

$$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto y'\big(f(x_0+\lambda h) - f(x_0)\big),$$

mit der Ableitung $\varphi'(\lambda) = y'\big(Df(x_0+\lambda h)\, h\big)$ an. Das liefert ein $\theta \in (0,1)$, sodass

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h) - f(x_0)\| &= y'\big(f(x_0+h) - f(x_0)\big) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = y'\big(Df(x_0+\theta h)\, h\big)\\ &\le \|y'\| \cdot \|Df(x_0+\theta h)\| \cdot \|h\| \le \sup_{\xi \in I} \|Df(\xi)\| \cdot \|h\|.\end{aligned}$$

□

1.14 Inverse und implizite Funktionen

Satz 1.15 (über inverse Funktionen)**.** *Seien E, F Banachräume, $U \subset E$ offen, $f \in C^1(U;F)$ und $a \in U$ so, dass $Df(a)\colon E \to F$ ein Isomorphismus ist. Dann existieren eine offene Umgebung $V \subset U$ von a und eine offene Menge $W \subset F$, sodass $f|_V\colon V \to W$ bijektiv ist. Die Umkehrabbildung $(f|_V)^{-1}$ liegt in $C^1(W;V)$. Ist $f \in C^k(U;F)$, so ist auch $(f|_V)^{-1}$ von der Klasse C^k.*

Für den Beweis formulieren wir den Satz in der folgenden Form.

Satz 1.16 (vom lokalen Inversen)**.** *Seien X, Y Banachräume, $E \subset X$ offen, $f\colon E \to Y$ eine C^k-Abbildung, $Df(x_0)$ invertierbar für ein $x_0 \in E$ und $y_0 = f(x_0)$. Dann gilt:*

(a) Es existieren offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $x_0 \in U$, $y_0 \in V$, sodass f injektiv auf U ist und $f(U) = V$.

(b) Ist g die Inverse von f (die nach (a) existiert), definiert auf V durch $(g \circ f)(x) = x$ für $x \in U$, so ist $g \in C^k(V)$.

Bemerkung 1.17. Die Aussage (b) gilt für C^k. Wir beweisen hier nur $g \in C^1(V)$.

Beweis. Setze $A \coloneqq Df(x_0)$ und wähle λ so, dass

$$2\lambda \left\|A^{-1}\right\| = 1. \tag{1}$$

Da Df in x_0 stetig ist, gibt es eine offene Kugel $U \subset E$ mit Mittelpunkt x_0, sodass

$$\|Df(x) - A\| < \lambda \quad \text{für } x \in U. \tag{2}$$

Wir ordnen jedem $y \in Y$ eine Funktion g_y zu, definiert durch

$$g_y(x) \coloneqq x + A^{-1}(y - f(x)), \quad x \in U. \tag{3}$$

Man beachte, dass $f(x) = y$ genau dann gilt, wenn x ein Fixpunkt von g_y ist. Wegen $Dg_y(x) = \mathrm{id} - A^{-1}Df(x) = A^{-1}(A - Df(x))$ folgt aus (1) und (2) die Abschätzung

$$\|Dg_y(x)\| < \tfrac{1}{2}, \quad x \in U. \tag{4}$$

Da U eine Kugel ist, liefert der Mittelwertsatz

$$\|g_y(x_1) - g_y(x_2)\| \leq \tfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in U. \tag{5}$$

Daraus folgt, dass g_y höchstens einen Fixpunkt in U besitzt, sodass $f(x) = y$ für höchstens ein $x \in U$ gilt. Damit ist f injektiv auf U.
Setze nun $V \coloneqq f(U)$ und wähle $y_0 \in V$ beliebig. Dann gibt es ein $x_0 \in U$ mit $y_0 = f(x_0)$. Sei B eine offene Kugel mit Mittelpunkt x_0 und Radius $r > 0$ so klein, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{B}$ in U liegt. Wir zeigen, dass $y \in V$ für alle y mit $\|y - y_0\| < \lambda r$ gilt. Das beweist, dass V offen ist.
Wähle y mit $\|y - y_0\| < \lambda r$. Mit g_y wie in (3) erhält man

$$\|g_y(x_0) - x_0\| = \left\|A^{-1}(y - y_0)\right\| < \left\|A^{-1}\right\| \lambda r = \tfrac{r}{2}.$$

Für $x \in \overline{B}$ folgt aus (5)

$$\|g_y(x) - x_0\| \leq \|g_y(x) - g_y(x_0)\| + \|g_y(x_0) - x_0\| < \tfrac{1}{2}\|x - x_0\| + \tfrac{r}{2} \leq r,$$

also $g_y(x) \in \overline{B}$. Man beachte, dass (5) für $x_1, x_2 \in \overline{B}$ gilt. Somit ist g_y eine Kontraktion von $\overline{B}$ in $\overline{B}$. Da $\overline{B}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Banachraums X ist, ist $\overline{B}$ vollständig. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert dann einen Fixpunkt $x \in \overline{B}$ von g_y. Für dieses x gilt $f(x) = y$, also $y \in f(\overline{B}) \subset f(U) = V$. Das zeigt (a).
Zu (b): Wähle $y \in V$ und $y + k \in V$ beliebig. Dann existieren $x \in U$ und $x + h \in U$ mit $y = f(x)$ und $y + k = f(x + h)$. Mit g_y wie in (3) erhält man

$$g_y(x + h) - g_y(x) = h + A^{-1}\big[f(x) - f(x + h)\big] = h - A^{-1}k.$$

Nach (5) folgt $\|h - A^{-1}k\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$. Also gilt $\|A^{-1}k\| \geq \frac{1}{2}\|h\|$ und

$$\|h\| \leq 2\left\|A^{-1}\right\| \|k\| = \lambda^{-1}\|k\|. \tag{6}$$

Nach (1), (2) und wegen der *Neumannschen Reihe* hat $Df(x)$ eine Inverse, etwa T (Übungsaufgabe, siehe die Bemerkung nach dem Beweis). Wegen

$$g(y + k) - g(y) - Tk = h - Tk = -T\big[f(x + h) - f(x) - Df(x)\,h\big]$$

folgt aus (6)

$$\frac{\|g(y + k) - g(y) - Tk\|}{\|k\|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda} \cdot \frac{\|f(x + h) - f(x) - Df(x)\,h\|}{\|h\|}.$$

Für $k \to 0$ folgt aus (6), dass $h \to 0$. Die rechte Seite der letzten Ungleichung strebt somit gegen 0, also auch die linke Seite. Damit ist $Dg(y) = T$ bewiesen. Da T die Inverse von $Df(x) = Df(g(y))$ ist, folgt

$$Dg(y) = \big[Df(g(y))\big]^{-1}, \quad y \in V. \tag{7}$$

Schließlich beachte man, dass Df eine stetige Abbildung von U in die Menge Ω aller invertierbaren Elemente von $L(X, Y)$ ist und dass die Inversion eine stetige Abbildung von Ω in die invertierbaren Elemente von $L(Y, X)$ ist.

> Ergänzung
>
> Außerdem ist g als differenzierbare Abbildung stetig von V nach U, also ist $Df \circ g$ stetig von V nach Ω.

Wendet man dies auf (7) an, so folgt $g \in C^1(V)$.

ERGÄNZUNG

Ist $f \in C^k$, so folgt $g \in C^k(V)$ induktiv aus $Dg = (Df \circ g)^{-1}$, da die Inversion glatt ist.

□

Lemma 1.18 (Neumannsche Reihe)**.** *Sei X ein Banachraum und $T \in L(X,X)$ mit $\|T\| < 1$. Dann ist* $\mathrm{id} - T$ *invertierbar, und es gilt*

$$(\mathrm{id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

BEWEIS. Übungsaufgabe (Tipp: $L(X,X)$ ist ein Banachraum). Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1 - \|T\|}$$

folgt

$$\begin{aligned}(\mathrm{id} - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n &= \lim_{m\to\infty} (\mathrm{id} - T) \sum_{n=0}^{m} T^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} (T^n - T^{n+1}) \\ &= \lim_{m\to\infty} (T^0 - T^{m+1}) = \mathrm{id},\end{aligned}$$

denn $\left\|T^{m+1}\right\| \leq \|T\|^{m+1} \to 0$ für $m \to \infty$.

ERGÄNZUNG

Genauso folgt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right)(\mathrm{id} - T) = \mathrm{id}$.

□

Bemerkung 1.19 (zum Beweis vom lokalen Inversen)**.** Im Beweis war

$$2\lambda \left\|A^{-1}\right\| = 1 \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \|Df(x) - A\| < \lambda \quad \text{für } x \in U. \quad (2)$$

Behauptet wurde: Aus (1), (2) und der Neumannschen Reihe folgt, dass $Df(x)$ invertierbar ist.
Argument: Nach (1) ist $\lambda = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, mit (2) also

$$\begin{aligned}&\|Df(x) - A\| < \frac{1}{2\,\|A^{-1}\|} \\ \Longrightarrow\ & 2\left\|A^{-1}\right\| \|Df(x) - A\| < 1 \\ \Longrightarrow\ & 2\left\|A^{-1}Df(x) - \mathrm{id}\right\| < 1 \\ \Longrightarrow\ & \left\|A^{-1}Df(x) - \mathrm{id}\right\| < \tfrac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Mit $T := \mathrm{id} - A^{-1}Df(x)$ ist also $\|T\| < 1$, und nach der Neumannschen Reihe existiert $(\mathrm{id} - T)^{-1} = \left(A^{-1}Df(x)\right)^{-1}$. Also ist $Df(x) = A\big(A^{-1}Df(x)\big)$ invertierbar als Verknüpfung invertierbarer Operatoren.

Definition 1.20 (Diffeomorphismus)**.** *Seien E, F Banachräume, $U \subset E$ offen und $f \in C^k(U;F)$. Ist $W := f(U) \subset F$ offen, ist $f\colon U \to W$ bijektiv und ist die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon W \to U$ ebenfalls von der Klasse C^k, so heißt f ein C^k-***Diffeomorphismus*** *zwischen U und W. Für $k = 0$ spricht man von einem* **Homöomorphismus**.

Für $f \in C^k(U;F)$, $k \geq 1$, und $a \in U$ verwenden wir folgende Sprechweisen:

- f ist ein **lokaler C^k-Diffeomorphismus** nahe a, wenn es eine offene Umgebung V von a gibt, sodass $f|_V$ ein C^k-Diffeomorphismus auf eine offene Menge ist. Nach dem Satz über inverse Funktionen ist das genau dann der Fall, wenn $Df(a)\colon E \to F$ ein Isomorphismus ist.
- f ist eine **C^k-Immersion** nahe a, wenn $Df(a)$ injektiv ist.
- f ist eine **C^k-Submersion** nahe a, wenn $Df(a)$ surjektiv ist.

Definition 1.21 (Regulärer Wert)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$. Ein Punkt $y \in \mathbb{R}^m$ heißt* **regulärer Wert** *von f, wenn $Df(a)$ für alle $a \in f^{-1}(\{y\})$ maximalen Rang hat.*

Beispiel 1.22 (Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$)**.** Betrachte

$$f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad (r,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Das Differential ist gegeben durch

$$\nabla f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \det \nabla f(r,\theta) = r \neq 0.$$

Also ist $Df(r,\theta)$ injektiv und wegen der Dimensionsformel auch surjektiv. Damit ist f nahe jedem Punkt ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus. Global ist f dagegen kein Diffeomorphismus, denn wegen $f(r,\theta+2\pi) = f(r,\theta)$ ist f nicht injektiv.

Satz 1.23 (über implizite Funktionen)**.** *Seien E, F, G Banachräume, $U \subset E$ und $V \subset F$ offen, $k \geq 1$, $\varphi \in C^k(U\times V;G)$ und $(u,v) \in U\times V$ so, dass $D_2\varphi(u,v)\colon F \to G$ ein Isomorphismus ist. Dann existieren eine offene Umgebung $U' \subset U$ von u, eine offene Umgebung $W \subset G$ von $\varphi(u,v)$, eine offene Umgebung $V' \subset V$ von v und eine eindeutige Abbildung $\psi\colon U'\times W \to V'$, sodass*

$$\varphi(x,\psi(x,z)) = z \quad \textit{für alle } (x,z) \in U'\times W.$$

Die Abbildung ψ ist von der Klasse C^k, und es gilt

$$\begin{aligned} D_1\psi(x,z) &= -\big(D_2\varphi(x,\psi(x,z))\big)^{-1} \circ D_1\varphi(x,\psi(x,z)), \\ D_2\psi(x,z) &= \big(D_2\varphi(x,\psi(x,z))\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Beweis. Definiere

$$F\colon U\times V \to U\times G, \quad F(x,y) \coloneqq \big(x,\varphi(x,y)\big).$$

Dann gilt

$$\varphi(x,y) \overset{!}{=} z \iff F(x,y) = \big(x,\varphi(x,y)\big) = (x,z) \Longrightarrow (x,y) = F^{-1}(x,z).$$

Es reicht also zu zeigen, dass F lokal invertierbar ist. Dazu wenden wir den Satz über inverse Funktionen auf F an.
Behauptung: $DF(u,v)\colon E\times F \to E\times G$ ist ein Isomorphismus.
Damit existieren offene Mengen $U' \subset U$ mit $u \in U'$ und $V' \subset V$ mit $v \in V'$, sodass $F|_{U'\times V'}$ ein C^k-Diffeomorphismus auf sein offenes Bild $U'\times W \subset U\times G$ ist. Schreibe $F^{-1}(x,z) = \big(x,\psi(x,z)\big)$. Nach Definition von F gilt für alle $(x,z) \in U'\times W$

$$(x,z) = F\big(F^{-1}(x,z)\big) = \big(x,\varphi(x,\psi(x,z))\big).$$

Nach Definition ist $\psi \in C^k$, weil $F^{-1} \in C^k(U'\times W)$ ist.
Beweis der Behauptung: Für $(e,f) \in E\times F$ gilt

$$DF(u,v)(e,f) = D_1F(u,v)\,e + D_2F(u,v)\,f$$

mit

$$D_1F(u,v)\,e = (e, D_1\varphi(u,v)\,e),$$
$$D_2F(u,v)\,f = (0, D_2\varphi(u,v)\,f),$$

also

$$DF(u,v)(e,f) = (e, D_1\varphi(u,v)\,e + D_2\varphi(u,v)\,f).$$

$DF(u,v)$ ist injektiv: Aus

$$0 = DF(u,v)(e,f) = (e, D_1\varphi(u,v)\,e + D_2\varphi(u,v)\,f)$$

folgt $e = 0$ und $D_2\varphi(u,v)\,f = 0$. Da $D_2\varphi(u,v)$ ein Isomorphismus ist, folgt $f = 0$.
$DF(u,v)$ ist surjektiv: Zu $(\tilde{e}, w) \in E \times G$ suchen wir $(e,f) \in E \times F$ mit

$$DF(u,v)(e,f) = (e, D_1\varphi(u,v)\,e + D_2\varphi(u,v)\,f) \overset{!}{=} (\tilde{e}, w).$$

Also $e = \tilde{e}$, und f ist Lösung von

$$D_2\varphi(u,v)\,f = w - D_1\varphi(u,v)\,\tilde{e}. \qquad \square$$

Satz 1.24 (über Submersionen)**.** *Seien E, F Banachräume, $U \subset E$ offen, $\varphi\colon U \to F$ von der Klasse C^k und $a \in U$ so, dass $D\varphi(a)\colon E \to F$ surjektiv ist. Zudem existiere ein abgeschlossener Untervektorraum $E_1 \subset E$ mit $E = E_1 \oplus N$, wobei $N \coloneqq \ker D\varphi(a)$. Dann existiert eine Umgebung $U' \subset U$ von a, sodass*

$$\Phi\colon U' \to F \times N, \quad \Phi(x) \coloneqq (\varphi(x), P_N(x-a)),$$

ein C^k-Diffeomorphismus auf ein offenes Bild ist.

Bemerkung 1.25. Dabei ist P_N die kanonische Projektion

$$P_N\colon E = E_1 \oplus N \to N, \quad (e_1, v) \mapsto v.$$

In Hilberträumen (z. B. im $\mathbb{R}^n$) existiert stets ein solches E_1, nämlich $E_1 = N^\perp$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $D\Phi(a)$ bijektiv ist. Es gilt

$$D\Phi(a)\,h = (D\varphi(a)\,h, P_N h) \quad \text{für alle } h \in E.$$

Surjektivität: Schreibe $h = h_1 + n$ mit $h_1 \in E_1$ und $n \in N$. Da $D\varphi(a)$ surjektiv ist und auf N verschwindet, gilt $D\varphi(a)(E_1) = D\varphi(a)(E) = F$, d. h. $D\varphi(a)|_{E_1}$ ist surjektiv. Da $h_1 \in E_1$ und $n \in N$ beliebig sind, ist $D\Phi(a)$ surjektiv.
Injektivität: Aus $0 = D\Phi(a)\,h$ folgt $D\varphi(a)\,h = 0$, also $h \in N$, und $P_N h = 0$, also $h = 0$. $\square$

2 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^p$

2.1 Definition und Charakterisierung

Definition 2.2 (Untermannigfaltigkeit)**.** *Eine n-**dimensionale Untermannigfaltigkeit** $N \subset \mathbb{R}^p$ ist eine Teilmenge, sodass für alle $a \in N$ eine in $\mathbb{R}^p$ offene Menge $U \ni a$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^p$ und ein C^k-Diffeomorphismus $\Phi\colon U \to V$ existieren mit*

$$\Phi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Wir nennen Φ eine **(lokale) Flachmachung**.

Proposition 2.3. *Sei $N \subset \mathbb{R}^p$. Dann sind äquivalent:*

(a) N ist eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^p$.

(b) Für alle $a \in N$ existieren eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^p$ von a und eine Submersion $g\colon U \to \mathbb{R}^{p-n}$, sodass $U \cap N = g^{-1}(\{0\})$.

Bemerkung 2.4. Eine Untermannigfaltigkeit ist also lokal die Niveaumenge einer Submersion.

Bemerkung 2.5 (zum Satz über implizite Funktionen)**.** (i) Die Einschränkung auf eine Umgebung $V' \subset V$ ist für die Eindeutigkeit nötig, d. h. $\psi\colon U' \times W \to V'$.

(ii) Der allgemeine Fall $\varphi(x, \psi(x, z)) = z$ kann auf den speziellen Fall $\varphi(x, \psi(x)) = 0$ zurückgeführt werden.

Beweis von Proposition 2.3. „(a) $\implies$ (b)“: Sei N eine Untermannigfaltigkeit und $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^p$ eine Flachmachung nahe einem Punkt $x \in N$. Definiere

$$g \coloneqq (\Phi_{n+1}, \dots, \Phi_p).$$

Dann gilt $U \cap g^{-1}(\{0\}) = U \cap N$. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, ist g eine Submersion. Die Details sind eine Übungsaufgabe.
„(b) $\implies$ (a)“: Sei $x_0 \in N$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ eine Umgebung von x_0 und $g\colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^{p-n}$ eine C^k-Submersion, sodass $g^{-1}(\{0\}) = \tilde{U} \cap N$. Gemäß dem Satz über Submersionen existiert für $x_0 \in g^{-1}(\{0\})$ eine Umgebung $U \subset \tilde{U}$ von x_0, sodass

$$\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n}, \quad x \mapsto \big(P_{\ker Dg(x_0)}(x - x_0),\, g(x)\big),$$

ein C^k-Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Wegen der Eigenschaften von g ist Φ eine Flachmachung für N nahe x_0. □

2.6 Beispiele

Beispiel 2.7 (Sphäre)**.** Für die Sphäre $S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$ ist

$$g\colon \mathbb{R}^p \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|^2 - 1,$$

eine Submersion, denn

$$Dg(x)\, h = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} g(x + th) = 2x \cdot h.$$

Also ist $Dg(x)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ surjektiv für alle $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$: Für gegebenes $s \in \mathbb{R}$ wähle z. B. $h = \frac{s}{2|x|^2}\, x$, dann ist $Dg(x)\, h = s$.

Ergänzung

Wegen $S^{p-1} = g^{-1}(\{0\})$ ist S^{p-1} nach Proposition 2.3 eine $(p-1)$-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^p$.

Beispiel 2.8 (Orthogonale Gruppe)**.** Sei

$$\mathrm{O}(k) \coloneqq \{A \in \mathbb{R}^{k \times k} \mid AA^T = I\}.$$

Offensichtlich ist $\mathrm{O}(k) \subset \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$, die Menge der invertierbaren $k \times k$-Matrizen.
Behauptung: $\mathrm{O}(k)$ ist eine $\frac{k(k-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k \times k}$.
Beweis. Definiere

$$g\colon \mathbb{R}^{k \times k} \to \mathbb{R}^{k \times k}_{\mathrm{sym}} \cong \mathbb{R}^{\frac{k(k+1)}{2}}, \quad A \mapsto A^T A - I.$$

Dann ist

$$Dg(A)\, B = B^T A + A^T B.$$

Behauptung: $Dg(A)\colon \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}^{k\times k}_{\text{sym}}$ ist surjektiv, falls $A \in \mathrm{O}(k)$.
Sei $S \in \mathbb{R}^{k\times k}$ symmetrisch. Gesucht ist $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ mit

$$B^T A + A^T B = S.$$

Man sieht, dass $B = \frac{1}{2}AS$ diese Gleichung löst:

$$\tfrac{1}{2}(S^T A^T A + A^T A S) = \tfrac{1}{2} \cdot 2S = S.$$

> Ergänzung
>
> Die Surjektivität von $Dg(A)$ ist eine offene Bedingung. Daher ist g auf einer offenen Umgebung von $\mathrm{O}(k)$ in $\mathbb{R}^{k\times k}$ eine Submersion.

Also ist nach Proposition 2.3 $\mathrm{O}(k) \subset \mathbb{R}^{k\times k}$ eine $\left(k^2 - \frac{k(k+1)}{2}\right) = \frac{k(k-1)}{2}$-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit. □

Beispiel 2.9 (Spezielle lineare Gruppe)**.** Sei $\mathrm{SL}(k,\mathbb{R}) \coloneqq \{A \in \mathbb{R}^{k\times k} : \det A = 1\}$. Die Abbildung

$$g\colon \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det A - 1,$$

ist in jedem Punkt von $\mathrm{SL}(k,\mathbb{R})$ eine Submersion (Übungsaufgabe).

> Ergänzung
>
> Da die Surjektivität von $Dg(A)$ eine offene Bedingung ist, ist g auf einer offenen Umgebung von $\mathrm{SL}(k,\mathbb{R})$ eine Submersion.

Also ist $\mathrm{SL}(k,\mathbb{R})$ eine (k^2-1)-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{k\times k}$.

Beispiel 2.10 (Spezielle orthogonale Gruppe)**.** $\mathrm{SO}(k,\mathbb{R}) \coloneqq \mathrm{O}(k) \cap \mathrm{SL}(k,\mathbb{R})$ ist eine $\frac{k(k-1)}{2}$-dimensionale Untermannigfaltigkeit (Übungsaufgabe).

2.11 Konstruktion von Untermannigfaltigkeiten

Proposition 2.12 (Konstruktionen)**.** *Sei $N \subset \mathbb{R}^p$ eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit.*

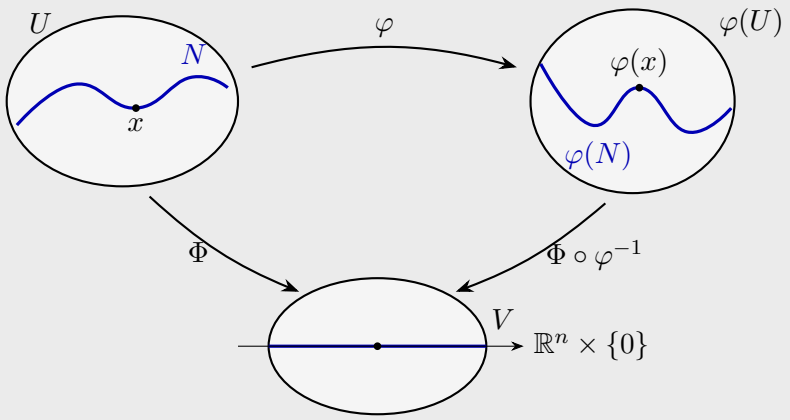
(i) Ist $\varphi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ ein C^k-Diffeomorphismus, so ist auch $\varphi(N) \subset \mathbb{R}^p$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit.

(ii) Sind $q > p$ und $i\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ die kanonische Injektion, d. h. $i(\mathbb{R}^p) = \mathbb{R}^p \times \{0\}^{q-p}$, so ist $i(N)$ eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^q$.

(iii) Ist $M \subset \mathbb{R}^q$ eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit, so ist $M \times N \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ eine $(m+n)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis. (i) Ist $x \in N$ und Φ eine Flachmachung für N nahe x, so ist $\Phi \circ \varphi^{-1}$ eine Flachmachung für $\varphi(N)$ nahe $\varphi(x)$.

Ergänzung



(ii) Sei $x_0 \in N$, $U \subset \mathbb{R}^p$ eine Umgebung von x_0 und $g\colon U \to \mathbb{R}^{p-n}$ eine Submersion, sodass $g^{-1}(\{0\}) = U \cap N$. Definiere $\widetilde{U} \coloneqq U \times \mathbb{R}^{q-p}$ und $\widetilde{g}\colon \widetilde{U} \to \mathbb{R}^{q-n}$ durch

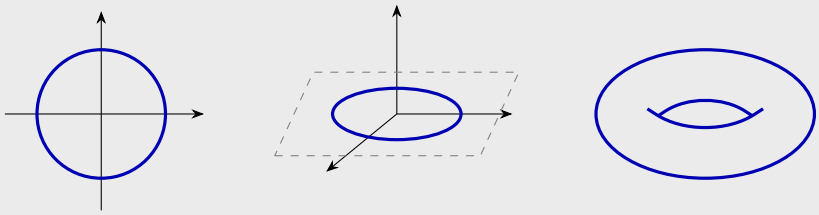
$$\widetilde{g}(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_q) \coloneqq \begin{pmatrix} g(x_1, \dots, x_p) \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}.$$

Man sieht: $\widetilde{g}$ ist eine Submersion, weil g eine ist, und $\widetilde{g}^{-1}(\{0\}) = i(N) \cap \widetilde{U}$. Da es zu jedem $y \in i(N)$ genau ein $x \in N$ mit $y = i(x)$ gibt, haben wir so für alle $y \in i(N)$ eine Umgebung und eine Submersion gefunden.
(iii) Stellt man N und M lokal als Niveaumengen von Submersionen dar, so findet man leicht eine solche Darstellung für $M \times N$ (Übungsaufgabe). □

Bemerkung 2.13. Mithilfe der Proposition kann man aus bekannten Untermannigfaltigkeiten weitere konstruieren. Zum Beispiel:

- $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- Nach (ii) ist $S^1 \subset \mathbb{R}^3$ eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit.
- Der Torus $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^4$ ist eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Ergänzung



$S^1 \subset \mathbb{R}^2$ $\quad$ $S^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ $\quad$ $S^1 \times S^1$ (schematisch im $\mathbb{R}^3$)

3 Mannigfaltigkeiten

3.1 Topologische und differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 3.2 (Hausdorff-Raum)**.** *Ein topologischer Raum X heißt* **Hausdorff-Raum***, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ disjunkte offene Umgebungen existieren, d. h. offene Mengen U_1, U_2 mit $x_i \in U_i$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Definition 3.3 (Topologische Mannigfaltigkeit)**.** *Ein Hausdorff-Raum X heißt* **topologische n-dimensionale (C^0-)Mannigfaltigkeit***, wenn für alle $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x und eine Abbildung $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ existieren, die ein Homöomorphismus auf ihr (offenes) Bild ist. Wir nennen Φ eine* **Karte** *nahe x.*

Definition 3.4 (Atlas)**.** *Sei X eine topologische Mannigfaltigkeit. Ein* **C^k-Atlas** *oder* **C^k-Kartensystem** *$(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ für X ist eine Familie von Karten, sodass $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ und für alle $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ die* **Übergangsabbildung**

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}\colon \Phi_i(U_i \cap U_j) \to \Phi_j(U_i \cap U_j)$$

eine C^k-Abbildung ist.

Bemerkung 3.5. (i) Die Bedingung an die Übergangsabbildungen ist für $i = j$ trivial.

(ii) Die Übergangsabbildungen sind dann C^k-Diffeomorphismen, weil $U_i \cap U_j = U_j \cap U_i$ und $(\Phi_j \circ \Phi_i^{-1})^{-1} = \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ nach Voraussetzung C^k ist.

(iii) Die Indexmenge I muss nicht abzählbar sein.

Bemerkung 3.6. Die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit ist wohldefiniert.

Beweis. Sind (U, Φ) und (V, Ψ) Karten mit $U \cap V \neq \emptyset$, so ist

$$\Psi \circ \Phi^{-1}\colon \underbrace{\Phi(U \cap V)}_{\subset \mathbb{R}^n \text{ offen}} \to \underbrace{\Psi(U \cap V)}_{\subset \mathbb{R}^k \text{ offen}}$$

ein Homöomorphismus. Man kann zeigen: Sind $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^k$ offen und ist A homöomorph zu B, so folgt $n = k$. □

Definition 3.7 (Äquivalente Atlanten)**.** *Zwei C^k-Atlanten $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ und $(V_j, \Psi_j)_{j\in J}$ von X heißen* **äquivalent***, wenn $(U_i, \Phi_i)_{i\in I} \cup (V_j, \Psi_j)_{j\in J}$ ebenfalls ein C^k-Atlas ist. Das heißt, $\Psi_j \circ \Phi_i^{-1}\colon \Phi_i(U_i \cap V_j) \to \Psi_j(U_i \cap V_j)$ ist C^k, falls $U_i \cap V_j \neq \emptyset$.*

Definition 3.8 (Differenzierbare Struktur)**.** *Eine Äquivalenzklasse von C^k-Atlanten heißt* **C^k-differenzierbare Struktur** *auf X. Ein Hausdorff-Raum X mit einer n-dimensionalen C^k-differenzierbaren Struktur heißt* **n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit***.*

Beispiel 3.9.

- $\mathbb{R}^n$ mit dem Atlas $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.
- Ist $N^n \subset \mathbb{R}^p$ eine C^k-Untermannigfaltigkeit, so ist N mit dem Atlas $(U_x \cap N, \pi \circ \Phi_x|_N)_{x\in N}$ eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit. Hier ist $\Phi_x\colon U_x \to \mathbb{R}^p$ eine lokale Flachmachung und $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{p-n} \to \mathbb{R}^n$ die kanonische Projektion.

Proposition 3.10 (Produktmannigfaltigkeit)**.** *Seien M eine m-dimensionale und N eine n-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit mit C^k-Atlanten $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ bzw. $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$. Dann ist $M \times N$ eine $(m + n)$-dimensionale C^k-Mannigfaltigkeit, wenn man es mit dem Atlas $(U_i \times V_j, \Phi_i \times \psi_j)_{i\in I, j\in J}$ versieht. Dabei ist*

$$(\Phi_i \times \psi_j)(u, v) \coloneqq \big(\Phi_i(u), \psi_j(v)\big).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

3.11 Topologische Eigenschaften

Proposition 3.12 (Lokale Kompaktheit)**.** *Topologische m-dimensionale Mannigfaltigkeiten M sind* **lokal kompakt***, d. h. für alle $x \in M$ existieren eine Umgebung U_x von x und eine kompakte Menge K_x mit $U_x \subset K_x$.*

Beweis. Sei $x \in M$ und (U, Φ) eine Karte nahe x. Dann ist Φ ein Homöomorphismus von U auf die offene Menge $\Phi(U)$. Da $\Phi(U)$ offen ist, existiert ein $\rho > 0$, sodass

$$B_\rho(\Phi(x)) \coloneqq \{z \in \mathbb{R}^m : |z - \Phi(x)| < \rho\}$$

in $\Phi(U)$ enthalten ist. Also ist der Abschluss von $B_{\rho/2}(\Phi(x))$ in $\Phi(U)$ enthalten. Da $\overline{B_{\rho/2}(\Phi(x))}$ kompakt ist, ist auch $K_x \coloneqq \Phi^{-1}(\overline{B_{\rho/2}(\Phi(x))}) \subset M$ kompakt. Setze $V_x \coloneqq \Phi^{-1}(B_{\rho/2}(\Phi(x)))$. □

Proposition 3.13 (Zusammenhang)**.** *Eine topologische Mannigfaltigkeit ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sie zusammenhängend ist.*

Erinnerung. Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht die Vereinigung zweier nichtleerer, offener, disjunkter Teilmengen ist. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert.

Bemerkung 3.14. Stets gilt

$$\text{wegzusammenhängend} \implies \text{zusammenhängend}.$$

Im Allgemeinen gilt aber

$$\text{zusammenhängend} \not\implies \text{wegzusammenhängend}.$$

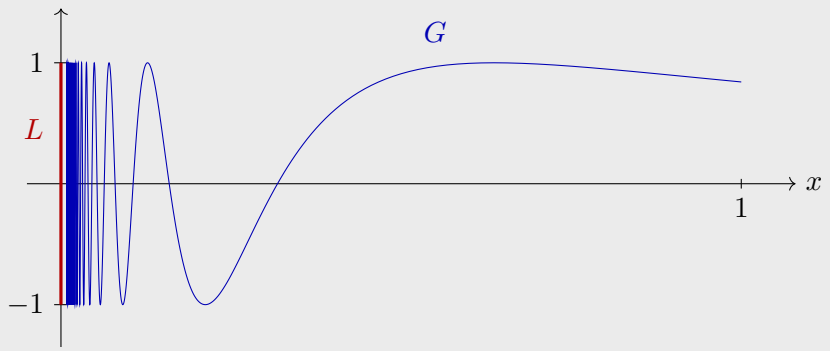
Beispiel 3.15 (Topologische Sinuskurve)**.** Der Raum

$$S \coloneqq \operatorname{graph}\Big(\sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big|_{(0,1]}\Big) \cup \{0\} \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$$

ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Ergänzung

Schreibe $G \coloneqq \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\}$ und $L \coloneqq \{0\} \times [-1,1]$, also $S = G \cup L$.
S ist zusammenhängend: G ist als stetiges Bild des Intervalls $(0,1]$ unter $x \mapsto (x, \sin(1/x))$ zusammenhängend. Zu jedem $y \in [-1,1]$ gibt es eine Folge $x_n \to 0$ mit $\sin(1/x_n) = y$, also liegt $(0, y)$ im Abschluss von G. Damit ist $\overline{G} = G \cup L = S$. Als Abschluss einer zusammenhängenden Menge ist S zusammenhängend.
S ist nicht wegzusammenhängend: Angenommen, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon [0,1] \to S$ ist stetig mit $\gamma(0) = (1, \sin 1) \in G$ und $\gamma(1) = (0,0) \in L$. Da L abgeschlossen ist, existiert $t_0 \coloneqq \min\{t : \gamma(t) \in L\} > 0$. Für $t < t_0$ ist $\gamma(t) \in G$, also $\gamma_1(t) > 0$ und $\gamma_2(t) = \sin(1/\gamma_1(t))$; außerdem ist $\gamma_1(t_0) = 0$. Wegen der Stetigkeit von γ_2 gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)| < \frac{1}{2}$ für alle $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Nach dem Zwischenwertsatz enthält $\gamma_1([t_0 - \delta, t_0])$ ein Intervall $[0, a]$ mit $a > 0$. Darin liegen Punkte $x_\pm$ mit $\sin(1/x_\pm) = \pm 1$, also nimmt γ_2 auf $[t_0 - \delta, t_0]$ die Werte 1 und -1 an. Das widerspricht $|\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)| < \frac{1}{2}$.



Beweis von Proposition 3.13. „$\Longleftarrow$“ gilt stets. Ist M ein zusammenhängender topologischer Raum und $\emptyset \neq C \subset M$ offen und abgeschlossen, so ist $C = M$.
„$\Longrightarrow$“: Sei M eine zusammenhängende topologische m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zu zeigen ist, dass für alle $x, y \in M$ eine stetige Kurve $\gamma \in C^0([0,1], M)$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ existiert. Anders gesagt reicht es zu zeigen, dass für alle $x \in M$

$$C_x \coloneqq \{y \in M \mid \exists\, \gamma \in C^0([0,1], M) \text{ mit } \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y\} \overset{!}{=} M.$$

Ergänzung

Wegen $x \in C_x$ (konstanter Weg) ist $C_x \neq \emptyset$.

Behauptung 1: C_x ist offen. Sei $y \in C_x$ und (U, φ) eine Karte nahe y. Da $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ offen ist, existiert ein Radius $\rho > 0$, sodass $B_\rho(\varphi(y)) \subset \varphi(U)$. Für jedes $z \in B_\rho(\varphi(y))$ ist $t \mapsto (1-t)\varphi(y) + tz$ ein Weg in $C^0([0,1], B_\rho(\varphi(y)))$, denn $B_\rho(\varphi(y)) \subset \mathbb{R}^m$ ist wegzusammenhängend. Definiere nun $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to M$ durch

$$\tilde{\gamma}(t) \coloneqq \varphi^{-1}((1-t)\varphi(y) + tz).$$

Dann ist $\tilde{\gamma}$ stetig, weil φ ein Homöomorphismus ist, und $\tilde{\gamma}$ verbindet y mit $\varphi^{-1}(z) \in \varphi^{-1}(B_\rho(\varphi(y)))$. Wir haben also für jedes $y \in C_x$ eine offene Umgebung $\varphi^{-1}(B_\rho(\varphi(y)))$ gefunden, die wegzusammenhängend ist.

Ergänzung

Hängt man einen Weg von x nach y und $\tilde{\gamma}$ hintereinander, so erhält man einen Weg von x nach $\varphi^{-1}(z)$. Also liegt die ganze Umgebung $\varphi^{-1}(B_\rho(\varphi(y)))$ in C_x.

Also ist C_x offen.
Behauptung 2: C_x ist abgeschlossen. Sei $y \in M \setminus C_x$. Dann ist C_y nach Behauptung 1 offen und eine Umgebung von y. Es reicht zu zeigen, dass $C_y \subset M \setminus C_x$, d. h. $C_y \cap C_x = \emptyset$. Andernfalls gäbe es ein $z \in C_x \cap C_y$, und man könnte x über z mit y verbinden. Dann wäre $y \in C_x$, ein Widerspruch. Wegen $C_y \subset M \setminus C_x$ ist

$$M \setminus C_x = \bigcup_{y \in M \setminus C_x} C_y$$

offen, also ist $C_x = M \setminus (M \setminus C_x)$ abgeschlossen.
Da M zusammenhängend ist, folgt $C_x = M$. Also ist M wegzusammenhängend. □

3.16 Beispiele differenzierbarer Strukturen

Beispiel 3.17. $\{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ ist ein C^∞-Atlas auf $\mathbb{R}$. Ein weiterer C^∞-Atlas ist $\{(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)\}$. Allgemein bekommt man mit $\{(\mathbb{R}, \Phi)\}$ für jeden Homöomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einen C^∞-Atlas, denn die einzige Kartenwechselabbildung ist $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}$, also C^∞.
Die zugehörigen differenzierbaren Strukturen sind aber im Allgemeinen verschieden. Zum Beispiel ist

$$\{(\mathbb{R}, \mathrm{id}), (\mathbb{R}, x \mapsto x^3)\}$$

kein C^1-Atlas, weil für $\varphi = \mathrm{id}$ und $\psi(x) = x^3$ gilt: $(\varphi \circ \psi^{-1})(x) = x^{1/3} \notin C^1$.

Der projektive Raum $\mathbb{R}P^n$. Auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiert man die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \iff \operatorname{span}\{x\} = \operatorname{span}\{y\}.$$

Damit ist $\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ und $[x] = \operatorname{span}\{x\} \setminus \{0\}$ für $[x] \in \mathbb{R}P^n$.

Proposition 3.18 (Projektiver Raum)**.** *$\mathbb{R}P^n$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit.*

Die Topologie auf $\mathbb{R}P^n$ ist

$$\{\pi(U) : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ offen}\},$$

wobei $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$, $x \mapsto [x]$, die kanonische Projektion ist.

Lemma 3.19 (Hausdorff-Eigenschaft)**.** *Die Topologie auf $\mathbb{R}P^n$ ist hausdorffsch.*

Beweis. Seien $[x] \neq [y]$. Dann existiert ein $r > 0$, sodass $\operatorname{span} B_r(x) \cap \operatorname{span} B_r(y) = \{0\}$. Also ist $\pi(B_r(x)) \cap \pi(B_r(y)) = \emptyset$, d. h. $\pi(B_r(x))$ und $\pi(B_r(y))$ sind disjunkte Umgebungen von $[x]$ bzw. $[y]$. □

Nun geben wir noch einen Atlas an.

Beispiel 3.20 (Atlas für $\mathbb{R}P^1$)**.** Setze

$$U_1 := \pi\big(\mathbb{R}^2 \setminus x_1\text{-Achse}\big), \qquad \varphi_1\colon U_1 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_1([x]) := \frac{x_1}{x_2},$$
$$U_2 := \pi\big(\mathbb{R}^2 \setminus x_2\text{-Achse}\big), \qquad \varphi_2\colon U_2 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_2([x]) := \frac{x_2}{x_1}.$$

Dann ist $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$ ein Atlas. Wegen $U_1 \cap U_2 = \pi(\mathbb{R}^2 \setminus \text{Achsen})$ ist $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und die Übergangsabbildung

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ist C^∞, denn $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(t) = \frac{1}{t}$. Also ist dies ein C^∞-Atlas.

3.21 Differenzierbare Abbildungen

Definition 3.22 (Differenzierbare Abbildung)**.** *Seien M^m und N^n beide C^k-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt C^k, wenn f stetig ist und für alle Karten (U, φ) eines Atlas auf M und (V, ψ) eines Atlas auf N*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi\big(U \cap f^{-1}(V)\big) \to \mathbb{R}^n$$

eine C^k-Abbildung im üblichen Sinne ist.

Bemerkung 3.23.

- Damit sind auch C^k-Abbildungen auf C^k-Mannigfaltigkeiten erklärt.
- Ist f eine C^k-Abbildung bezüglich eines Paares von Atlanten (auf M und N), so auch bezüglich jedes anderen Paares jeweils äquivalenter Atlanten (Übungsaufgabe).

Definition 3.24 (Diffeomorphie)**.** *Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt C^k***-Diffeomorphismus***, wenn f ein Homöomorphismus ist und f und f^{-1} von der Klasse C^k sind. Existiert ein C^k-Diffeomorphismus zwischen M und N, so heißen M und N C^k***-diffeomorph*** zueinander.*

Beispiel 3.25. Sei $M = \mathbb{R}$ mit dem C^∞-Atlas $\{(\mathbb{R}, \mathrm{id})\}$ und $N = \mathbb{R}$ mit dem C^∞-Atlas $\{(\mathbb{R}, \psi)\}$, $\psi(x) = x^{1/3}$. Das sind zwei verschiedene C^∞-Mannigfaltigkeiten (siehe oben), aber sie sind diffeomorph: Für $f\colon M \to N$, $f(x) = x^3$, ist

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id},$$

also $f \in C^\infty(M, N)$, und

$$\varphi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1} = \mathrm{id},$$

also $f^{-1} \in C^\infty(N, M)$. Dabei ist $\varphi = \mathrm{id}$.

Bemerkung 3.26. Ist M eine Mannigfaltigkeit und $\varphi\colon M \to \varphi(M) \subset \mathbb{R}^m$ eine Karte, so ist $\varphi^{-1}\colon \varphi(M) \to M$ ein C^k-Diffeomorphismus von $(\varphi(M), \mathrm{id})$ nach M (Übungsaufgabe).

Definition 3.27 (Immersion und Submersion)**.** *Sei $f \in C^k(M,N)$. Dann heißt f* **Immersion***, wenn $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ für alle x injektiv ist, und* **Submersion***, wenn diese Ableitung für alle x surjektiv ist.*

Bemerkung 3.28. Für eine Immersion muss $m \leq n$ sein, für eine Submersion $m \geq n$. Die Definition ist wieder unabhängig von der Wahl der Atlanten innerhalb der differenzierbaren Struktur.

4 Der Tangentialraum

Für eine Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^p$ ist der Tangentialraum im Punkt $x \in M$ definiert als

$$T_xM \coloneqq \{\gamma'(0) : \gamma \in C^1((-\delta,\delta), M),\ \gamma(0) = x\}.$$

4.1 Tangentialraum von Untermannigfaltigkeiten

Bemerkung 4.2. Ist M nahe $x_0 \in M$ als Niveaumenge einer Submersion $F\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^{p-m}$ gegeben, so ist

$$T_{x_0}M = \ker DF(x_0).$$

Beispiel 4.3. Für $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist $S^n = F^{-1}(\{0\})$ mit $F(x) = |x|^2 - 1$. Wegen $\nabla F(x) = 2x$ ist $\ker DF(x) = \{x\}^\perp$, also $T_xS^n = \{x\}^\perp$.

4.4 Tangentialraum von Mannigfaltigkeiten

Sei nun M^m eine C^1-Mannigfaltigkeit. Für $x_0 \in M$ definiere

$$\mathcal{P}_{x_0}(M) \coloneqq \{\gamma \in C^1((-\delta,\delta), M) : \delta > 0 \text{ und } \gamma(0) = x_0\}.$$

Auf $\mathcal{P}_{x_0}(M)$ führt man die Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \text{es existiert eine Karte } (U,\varphi) \text{ nahe } x_0 \text{ mit } (\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$$

ein.

Bemerkung 4.5. Es gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann, wenn *für alle* Karten nahe x_0 gilt: $(\varphi\circ\gamma_1)'(0) = (\varphi\circ\gamma_2)'(0)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 4.6 (Tangentialraum)**.** *Der* **Tangentialraum** *an M in x_0 ist*

$$T_{x_0}M \coloneqq \mathcal{P}_{x_0}(M)/\!\sim.$$

5 Vektorfelder und Flüsse

5.1 Vektorfelder im $\mathbb{R}^n$

Definition 5.2 (Vektorfeld)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $X\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt* **Vektorfeld** *auf U. Ist X zudem C^k, so heißt X ein C^k-***Vektorfeld***.*

Definition 5.3 (Integralkurve)**.** *Sei X ein C^1-Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Eine C^1-Kurve $\gamma\colon I \to U$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$, die für alle $t \in I$ die Gleichung*

$$\dot{\gamma}(t) = X\big(\gamma(t)\big)$$

löst, heißt **Integralkurve** *des Vektorfeldes X.*

Definition 5.4 (Fluss)**.** *Sei X ein C^1-Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$. Eine Abbildung*

$$\Gamma\colon I \times U \to U,$$

die für alle $(t, x) \in I \times U$ den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,x) &= X\big(\Gamma(t,x)\big), \\ \Gamma(0,x) &= x \end{aligned}$$

genügt, heißt **(lokaler) Fluss** *von X.*

Satz 5.5 (lokale Existenz eines Flusses)**.** *Sei $k \geq 1$, X ein C^k-Vektorfeld auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in U$. Dann existieren eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset U$ von a, ein $T > 0$ und eine C^k-Abbildung*

$$\Gamma\colon [-T, T] \times \tilde{U} \to U,$$

sodass für alle $(t, x) \in [-T, T] \times \tilde{U}$ gilt:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,x) = X\big(\Gamma(t,x)\big), \qquad \Gamma(0,x) = x.$$

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. P. Hornung; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. P. Hornung; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.