mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

AN40: Differentialgleichungen & Mannigfaltigkeiten

Wintersemester 2025/2026
Leitung: Prof. S. Neukamm

Inhaltsverzeichnis

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen **3**

1.1 Grundlagen . . . 3
Definition 1.1.1 (Anfangswertprobleme (AWP)) . . . 3
1.2 Existenz und Eindeutigkeit . . . 3
Satz 1.2.1 (Peano) . . . 3
Satz 1.2.3 (Picard–Lindelöf) . . . 4
1.3 Maximale Lösungen und Fortsetzbarkeit . . . 4
1.4 Abschätzungen und Stabilität . . . 4
Lemma 1.4.1 (von Gronwall) . . . 4

2 Lineare Systeme **6**

2.1 Lineare Autonome Systeme . . . 6
Definition 2.1.3 (Matrix-Exponential) . . . 6
2.2 Lineare Zeitvariante Systeme . . . 8
Satz 2.2.2 (Globale Existenz und Eindeutigkeit) . . . 8
Satz & Definition 2.2.3 (Fundamentalmatrix) . . . 8
Lemma 2.2.4 (Lineare Inhomogene Systeme) . . . 9
Lemma 2.2.5 (Skalare homogene Systeme 1. Ordnung) . . . 9

3 Untermannigfaltigkeiten **10**

3.1 Grundlagen . . . 10
Definition 3.1.1 (Parametrisierte Kurve) . . . 10
Definition 3.1.2 (Länge einer C^1-Kurve) . . . 10
Definition 3.1.3 (Kurvenintegral) . . . 10
Satz 3.1.5 (Wegunabhängigkeit und Gradientenfelder) . . . 10

zul. geändert am 7. November 2026

3.2 Konstruktion . . . 11
Definition 3.2.1 (Immersion) . . . 11
Definition 3.2.2 (Einbettung) . . . 11
Definition 3.2.4 (Untermannigfaltigkeit) . . . 11
Definition 3.2.5 (Karte, Atlas) . . . 12
Beispiel 3.2.6 (Sphäre) . . . 12
3.3 k-dimensionales Volumen . . . 12
Definition 3.3.1 (Maßtensor) . . . 12
Definition 3.3.2 (k-dim. Volumina) . . . 12
3.4 Oberflächenintegral . . . 13
Definition 3.4.1 (Oberflächenintegral über ein Kartengebiet) . . . 13
Definition 3.4.3 (Zerlegung der Eins) . . . 14
Definition 3.4.5 (Oberflächenintegral einer UMf. M) . . . 14
3.5 Tangentialräume . . . 15
Definition 3.5.1 (Tangentialvektor und Tangentialraum) . . . 15
Satz 3.5.2 (Dimension des Tangentialraums) . . . 15
Definition 3.5.3 (Normalenraum) . . . 15
Definition 3.5.5 (Einheitsnormalenfeld) . . . 16
Definition 3.5.7 (Orientierbarkeit) . . . 16
3.6 Globale Integralsätze . . . 16
Definition 3.6.1 (C^1-Rand) . . . 16
Definition 3.6.4 (Divergenz und Rotation eines Vf.) . . . 17
Satz 3.6.5 (Integralsatz von Gauß) . . . 18
Lemma 3.6.7 (1. und 2. Greensche Formel) . . . 18
Satz 3.6.9 (Satz von Stokes im R^3) . . . 19

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1. (Anfangswertprobleme (AWP)).
Ein **Anfangswertproblem (AWP)** n**-ter Ordnung** *auf einem Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *ist*

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y^{(j)}(t_0) = y_j, \qquad 0 \le j \le n-1 \end{cases}$$

wobei $f : I \times U_1 \times \cdots \times U_{n-1} \to \mathbb{R}^d$ *(mit* $U_i \subset \mathbb{R}^d$ *offen) gegeben ist.*

Bemerkung 1.1.2. Ein AWP höherer Ordnung lässt sich durch Einführung von Zustandsvariablen auf ein äquivalentes System erster Ordnung reduzieren. Deshalb reicht es, Anfangswertprobleme 1. Ordnung der Form

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

zu studieren.

Beispiel 1.1.3. Reduktion: $y'' + p(t)y' + q(t)y = r(t)$ mit $y_1 = y,\ y_2 = y' \Rightarrow$ System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix}.$$

Definition 1.1.4. *Eine Funktion* $y : I \to \mathbb{R}^d$ *heißt* **Lösung** *des AWP, falls* y *n-mal (stetig) differenzierbar ist und die Gleichung in* $(*)$ *sowie Anfangsbedingung erfüllt.*

1.2 Existenz und Eindeutigkeit

Satz 1.2.1. (Peano). *Sei* $(*)$ *wie in 1.1.2. Sei* f *stetig auf einer Umgebung von* (t_0, y_0). *Dann existiert mindestens eine lokale Lösung* $y : J \to \mathbb{R}^d$ *des AWP auf einem Intervall* J *um* t_0.

Bemerkung 1.2.2. Peano garantiert lediglich Existenz — Eindeutigkeit braucht stärkere Annahmen.

Satz 1.2.3. (Picard–Lindelöf). *Sei $(*)$ ein AWP und $f(t,y)$ auf einem Rechteck $R = [t_0-h, t_0+h] \times B_r(y_0)$ stetig und lokal Lipschitz in y (d. h. $\exists L$ mit $\|f(t,y)-f(t,z)\| \leq L\|y-z\|$). Dann existiert eine eindeutige Lösung des AWP auf einem Intervall $I \subset R$; sie entsteht als Fixpunkt der Picard-Iteration*

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds.$$

Korollar 1.2.4. *Stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert: Kleine Änderungen in y_0 führen (lokal) zu kleinen Änderungen der Lösung (abschätzbar durch Gronwall).*

1.3 Maximale Lösungen und Fortsetzbarkeit

Definition 1.3.1. *Eine Lösung $y : I_{\max} \to \mathbb{R}^d$ heißt* **maximal**, *falls für alle Lösungen $\hat{y} : \hat{I} \to \mathbb{R}^d$ des AWP gilt: $\hat{I} \subset I_{\max}$*

Satz 1.3.2. *Unter den Picard-Annahmen besitzt jedes AWP genau eine lokale Lösung; diese besitzt eine eindeutige maximale Fortsetzung. Entweder ist das maximale Intervall unbeschränkt, oder die Lösung läuft auf den Rand der Definitionsmenge zu (Blow-up).*

1.4 Abschätzungen und Stabilität

Lemma 1.4.1. (von Gronwall). *Sei $I = [t_0, t_1)$ und seien $\alpha, \beta \in C(I;\mathbb{R})$.*

1. *(Differentielle Form) Ist $y \in C^1(I;\mathbb{R})$ und erfüllt*

$$y'(t) \leq \alpha(t) + \beta(t)\, y(t) \quad \text{für alle } t \in (t_0, t_1),$$

so gilt für alle $t \in I$

$$y(t) \leq y(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds} + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, e^{\int_{s}^{t} \beta(r)\, dr}\, ds.$$

2. *(Integrale Form) Ist $y \in C(I;\mathbb{R})$, $\beta \geq 0$ und gilt*

$$y(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, y(s)\, ds \quad \text{für alle } t \in I,$$

so folgt für alle $t \in I$

$$y(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{t} \alpha(s)\, \beta(s)\, e^{\int_{s}^{t} \beta(r)\, dr}\, ds.$$

Korollar 1.4.2. *Gronwall liefert die klassische Stetigkeitsabschätzung für Lösungen und die Lipschitz-Abhängigkeit von Anfangsbedingungen.*

Satz 1.4.3 (Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert)**.** *Sei f stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Sei $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ eine Lösung zum Anfangswert y_0. Dann existieren Konstanten $\delta, C > 0$, sodass für alle $\tilde{y}_0 \in B(y_0; \delta)$ eine Lösung $\tilde{y} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^d$ existiert und*

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq C\,|y_0 - \tilde{y}_0| \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

Satz 1.4.4 (Differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert)**.** *Sei f zusätzlich stetig differenzierbar bezüglich y. Dann ist die Lösungsabbildung*

$$p \longmapsto X(t; p)$$

differenzierbar. Die Ableitung

$$v(t) = \partial_p X(t; y_0)\, v_0$$

erfüllt die linearisierte Differentialgleichung

$$v'(t) = A(t)\, v(t), \qquad v(t_0) = v_0,$$

wobei

$$A(t) := \partial_y f\big(t, y(t)\big).$$

2 Lineare Systeme

2.1 Lineare Autonome Systeme

Definition 2.1.1. *Betrachte wieder* $(*)$ *1.1.2. Ein System der Form* $f(t, y) = Ay(t)$ *mit einer konstanten Matrix* $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *heißt lineares, homogenes, autonomes System.*

Bemerkung 2.1.2. Linear-homogene Autonome Systeme sind so gutartig, dass wir ihre Lösungen direkt hinschreiben können. Insbesondere gelten die folgenden Eigenschaften.

1. **Superpositionsprinzip**: Sind y_1, y_2 Lösungen, so ist auch $c_1y_1+c_2y_2$ eine Lösung.
2. **Lösungsraum**: Die Menge aller Lösungen bildet einen Vektorraum der Dimension d. Qualitativ formuliert: Sei $y' = Ay$ ein linear-homogenes autonomes System. Dann ist
$$\mathbb{L} = \left\{ y_j = \exp(tA)e_j \mid 1 \leq j \leq d = \sqrt{\dim(A)} \right\}$$
genau dieser d-dim. Lösungsraum. Für $\exp(tA)$ siehe 2.1.3
3. Globale Existenz & Eindeutigkeit: Für jeden AW $y(t_0) = y_0$ existiert eine eindeutige, globale Lösung auf ganz $\mathbb{R}$.

Definition 2.1.3. (Matrix-Exponential)**.** *Für eine Matrix* $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ *ist die Matrix-Exponentialfunktion definiert durch die absolut konvergente Reihe:*

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \dots$$

Satz 2.1.4. *Sei* $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$*. Das AWP* $y' = Ay$*,* $y(t_0) = y_0$ *besitzt die eindeutige globale Lösung*

$$y(t) := \exp((t - t_0)A)y_0$$

Lemma 2.1.5. *Sei* $y(t)$ *Lösung aus* 2.1.4*. Dann gilt*

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$$

Beispiel 2.1.6. Sei $y'(t) = Ay(t)$ DGL und A ist reell diagonalisierbar. Dann gilt

$$A = SDS^{-1}$$

für ein S invertierbar und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$. Berechne nun $\exp(tA)$ mithilfe der Eigenschaft

$$\exp(SBS^{-1}) = S\exp(B)S^{-1}$$
$$\Rightarrow \exp(tA) = \exp(tSDS^{-1}) = S\exp(tD)S^{-1}$$

$$= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Die Lösung ist eine Linearkombination von Termen der Form $e^{\lambda_j t} v_j$, wobei v_j die Eigenvektoren (Spalten von S) sind.

Beispiel 2.1.7. Sei die DGL gegeben durch den harmonischen Oszillator.

$$y'' + y = 0 \iff z' = Az$$

mit $z = (y, y')$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

A ist komplex diagonalisierbar.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Für $z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z(t) = \exp(tA)z(0) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$$

Reelle Lösungen entstehen aus komplex konjugierten Eigenwertpaaren $\lambda = a \pm i\omega$ und haben die Form $e^{at}(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$.

Beispiel 2.1.8. Sei $y'(t) = Ay(t)$ DGL und A ist nicht diagonalisierbar. Dann ist dennoch jede Matrix A ähnlich zu einer Matrix in Jordanscher Normalform $J = S^{-1}AS$.

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_\ell), \quad J_j = \lambda_j I + N_j$$

wobei N_j ist eine nilpotent ist. Nehme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ist nilpotent ($A^3 = 0$).

$$\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$$\exp(tJ_j) = e^{\lambda_j t} \exp(tN_j)$$

Lösungen enthalten also Terme der Form $t^k e^{\lambda t}$.

2.2 Lineare Zeitvariante Systeme

Definition 2.2.1. *Ein System der Form $y' = A(t)y + b(t)$ mit stetigen, zeitabhängigen $A(t), b(t) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ heißt lineares, zeitvariantes System.*

Satz 2.2.2. (Globale Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A(t)$ und $b(t)$ stetig auf I. Dann hat das AWP $y' = A(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ für jedes $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ eine eindeutige, globale Lösung $y : I \to \mathbb{R}^d$. (folgt aus 1.2.3 und 1.4.1)*

Satz 2.2.3. (Fundamentalmatrix)**.** *Sei $A : I \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig auf I offen. Es existiert genau eine Abbildung*

$$\Phi : I \times I \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

sodass für alle $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$ die Abbildung

$$y(t) := \Phi(t, t_0)y_0$$

das homogene AWP $y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$ löst. Φ heißt Fundamentalmatrix und hat folgende Eigenschaften:

1. $\Phi(t, t) = I$
2. *Funktionalgleichung:* $\Phi(t, s) = \Phi(t, r)\Phi(r, s)$
3. *Ableitung:* $\frac{d}{dt}\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s)$
4. *Invertierbarkeit:* $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$

Falls A nicht von t abhängt:

$$\Phi(t,s) = \exp((t-s)A)$$

Falls $A(t) = a(t) \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(t,s) = \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right)$$

Lemma 2.2.4. (Lineare Inhomogene Systeme)**.** *Mihilfe von Variation der Konstanten.*

Sei $\Phi(t,s)$ die Fundamentalmatrix von $y' = A(t)y$. Die Lösung des inhomogenen AWP $y' = A(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ ist gegeben durch:

$$y(t) = \Phi(t,t_0)y_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,s)b(s)\,ds$$

Lemma 2.2.5. (Skalare homogene Systeme 1. Ordnung)**.**
Betrachte das skalare AWP $y' = f(t)g(y)$, $y(t_0) = y_0$.

1. *Fall: Wenn $g(y_0) = 0$, ist $y(t) \equiv y_0$ eine konstante Lösung.*
2. *Fall: Wenn $g(y_0) \neq 0$, so ist die Lösung implizit gegeben durch:*

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(x)}dx = \int_{t_0}^t f(s)ds$$

3 Untermannigfaltigkeiten

3.1 Grundlagen

Definition 3.1.1. (Parametrisierte Kurve)**.** *Eine stetige Abb. $\gamma : I \to \mathbb{R}^d$ heißt parametrisierte Kurve. γ heißt regulär, wenn $\gamma \in C^1$ und $\gamma'(t) \neq 0$.*

Definition 3.1.2. (Länge einer C^1-Kurve)**.**. *Sei $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$. Dann bezeichnet*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_2 \, dt.$$

die Länge von γ.

Definition 3.1.3. (Kurvenintegral)**.**. *Für ein Vektorfeld F ist*

$$\int_\gamma F \cdot dx := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt.$$

Das sogenannte Kurvenintergral unter γ

Beispiel 3.1.4. Sei

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ct), \quad t \in [0, 2\pi].$$

γ ist C^1.

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t, c) \quad \Rightarrow \quad |\gamma'(t)|_2 = \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Es ergeben sich Länge daher die Länge über dem Intervall $[0, 2\pi]$:

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + c^2} \, dt = 2\pi \sqrt{r^2 + c^2}.$$

Sei $F = (0, 0, -1)$ ein Vektorfeld. Dann ist die physikalisch verrichtete Arbeit entlang von γ:

$$\int_\gamma F \cdot dx = \int_0^{2\pi} (0, 0, -1) \cdot \gamma'(t) \, dt = -2\pi c.$$

Satz 3.1.5. (Wegunabhängigkeit und Gradientenfelder)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und wegzusammenhängend, $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$ stetig.*
Äquivalent sind:

(a) F ist ein Gradientenfeld: $\exists f \in C^1(\Omega)$ mit $F = \nabla f$.

(b) F ist konservativ (wegunabhängig):

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dx = \int_{\gamma_2} F \cdot dx$$

für alle Kurven γ_1, γ_2 mit gleichen Endpunkten.

Lemma 3.1.6. *Sei $F = \nabla f$, dann gilt:*

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

3.2 Konstruktion

Definition 3.2.1. (Immersion)**.** *Seien $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Die Abbildung φ heißt* **Immersion**, *wenn die Jacobi-Matrix $Df(x)$ für alle $x \in U$ vollen Rang k besitzt, d.h.*

$$\operatorname{rang}(Df(x)) = k \quad \text{für alle } x \in U.$$

Definition 3.2.2. (Einbettung)**.** *Sei $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ eine Immersion. Falls*

$$\psi : U \to \varphi(U), \quad x \mapsto \varphi(x)$$

ein Homöomorphismus ($U \cong \varphi(U)$) ist, dann heißt ψ **Einbettung**.

Bemerkung 3.2.3. ψ Einbettung ist ein lokaler Diffeomorphismus, denn

$$D\psi = D\varphi$$

Definition 3.2.4. (Untermannigfaltigkeit)**.** *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit, wenn für jedes $a \in M$ lokal eine der äquivalenten Darstellungen gilt:*

(a) Parameterdarstellung: M ist lokal Bild einer Einbettung $\psi : U \to \mathbb{R}^n$.

(b) Implizite Darstellung: M ist lokal Nullstellenmenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset \widehat{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ mit vollem Rang ($\operatorname{rang}(Df) = n - k \; \forall x \in \widehat{V}$)

(c) Kartendarstellung: M ist lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$.

Weitere Darstellung: M ist lokal Graph einer C^1-Funktion.

Definition 3.2.5. (Karte, Atlas)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k-$ dim. C^1- Untermannigfaltigkeit. Wir nennen $V \subset M$ offen ein Kartengebiet, falls es $\widehat{V}, \widehat{U}$ und ein $\widehat{\Phi} : \widehat{V} \to \widehat{U}$ Diffeomorphismus gibt, sodass $\widehat{V} \cap M = V$ und $\widehat{U} \cap \mathbb{R}^n_k = \widehat{\Phi}(\widehat{V})$. In diesem Fall heißt $\widehat{\Phi}$ Karte für M. Eine Familie von Karten $(\Phi_i)_{i\in I}$ zu Kartengebieten $(V_i)_{i\in I}$ heißt Atlas von M, falls $\bigcup_{i\in I} V_i \supset M$.*

Beispiel 3.2.6. (Sphäre)**.** Betrachte

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|_2^2 = 1\}$$

ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Implizite Darstellung:

$$f(x) = |x|_2^2 - 1 \quad \& \quad \nabla f(x) = 2x \neq 0 \quad \text{für } x \in S^{n-1}.$$

Rang der Jacobi-Matrix $Jf(x)$ ist

$$1 = n - (n-1).$$

S^{n-1} ist Nullstellenmenge von f.

3.3 k-dimensionales Volumen

Definition 3.3.1. (Maßtensor)**.** *Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ eine Immersion. Die Abbildung*

$$G_\varphi : U \to \mathbb{R}^{k\times k}, \quad y \mapsto J_\varphi(y)^\top J_\varphi(y)$$

heißt Maßtensor von φ und

$$g^\varphi := \det G_\varphi$$

die Gram'sche Determinante von φ.

Definition 3.3.2. (k-dim. Volumina)**.** *Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $V \subset U$ meßbar. Dann heißt*

$$\mathbf{Vol}_k(\varphi|_V) := \int_V \sqrt{g^\varphi(y)}\lambda^k(dy)$$

das $k-$dim. Volumen von φ.

Falls $\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ Immersion, wobei $\varphi(U) \cong W$ homöomorph, so nennen wir

$$\mathbf{Vol}_k(W) = \mathbf{Vol}_k(\varphi)$$

das $\underline{k-\text{dim. Volumen}}$ von W.

Bemerkung 3.3.3. Falls φ_1, φ_2 Einbettungen sind, die W parametrisieren, dann gilt:

$$\mathbf{Vol}_k(\varphi_1) = \mathbf{Vol}_k(W) = \mathbf{Vol}_k(\varphi_2)$$

3.4 Oberflächenintegral

Definition 3.4.1. (Oberflächenintegral über ein Kartengebiet)**.** *Sei V ein Kartengebiet einer $k-$ dim. Untermannigfaltigkeit der $\mathbb{R}^n$. Und $u : V \to \overline{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion. Dann heißt u integrierbar auf V, falls für eine Einbettung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subset \mathbb{R}^k, \varphi(U) = V$ die Funktion $(u \circ \varphi)\sqrt{g^\varphi}$ (Lebesgue-)integrierbar auf U ist. In diesem Fall heißt:*

$$\int_V u \, \mathrm{d}S := \int_U u(\varphi(y))\sqrt{g^\varphi(y)}dy$$

Das Oberflächenintegral von u auf V.

Beispiel 3.4.2. Sei V ein Kartengebiet einer k-dim. Untermannigfaltigkeit M und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung mit $V = \varphi(U)$.

1. Sei $W \subset V$ offen in V. Dann ist $U' := \varphi^{-1}(W)$ offen in U (φ homöomorph) und damit $U \ni y \mapsto \mathbb{1}_{U'}(y)\sqrt{g^\varphi(y)}$ meßbar. Es gilt

$$\int_V \mathbb{1}_W(x) \, \mathrm{d}S(x) = \int_U \mathbb{1}_W(\varphi(y))\sqrt{g^\varphi(y)}dy = \int_U \mathbb{1}_{U'}(y)\sqrt{g^\varphi(y)}dy$$

$$= \int_{U'} \sqrt{g^\varphi(y)}dy = \mathbf{Vol}_k(\varphi|_{U'})$$

   Da aber $\varphi|_{U'} : U' \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung mit $\varphi(U') = W$ ist, gilt nach 3.3.2, dass

$$\mathbf{Vol}_k(W) = \int_V \mathbb{1}_W \, \mathrm{d}S$$

2. Sei $V = \Gamma(f)$ Graph einer Funktion $f \in C^1(U)$. Sei $u : V \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\int_V u \, \mathrm{d}S = \int_U u(y, f(y))\sqrt{1 + |\nabla f(y)|_2^2} \, \mathrm{d}y$$

Definition 3.4.3. (Zerlegung der Eins)**.** *Sei M eine Untermannigfaltigkeit. Unter einer* **Zerlegung der Eins** *auf M verstehen wir eine Familie stetiger Funktionen $(\eta_i)_{i\in I} \subset C(M)$ mit abzählbarer Indexmenge I und folgenden Eigenschaften:*

(i) $0 \leq \eta_i(x) \leq 1$ *für alle Punkte $x \in M$ und alle $i \in I$.*

(ii) Die Familie $(\eta_i)_{i\in I}$ ist lokal endlich, d. h. für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine (in M) offene Umgebung V von x, sodass $\eta_i = 0$ in V für alle bis auf endlich viele $i \in I$.

(iii) Es gilt

$$\sum_{i\in I} \eta_i(x) = 1$$

für alle Punkte $x \in M$.

Ist $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M (z. B. ein abzählbarer Atlas von M), so sagen wir, dass die Zerlegung der Eins $(\eta_i)_{i\in I}$ der Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ **untergeordnet** *ist, falls zusätzlich gilt:*

(iv) Für jedes $i \in I$ ist der Träger $\operatorname{supp}(\eta_i)$ *in V_i enthalten.*

Satz 3.4.4. *Jede Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ besitzt einen abzählbaren Atlas $(V_i, \varphi_i)_{i\in I}$ und eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\eta_{i i\in I}$*

Definition 3.4.5. (Oberflächenintegral einer UMf. M)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine Funktion $u : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt* **messbar auf** *M, wenn ein abzählbarer Atlas $(V_i)_{i\in I}$ und eine diesem untergeordnete Zerlegung der Eins $(\eta_i)_{i\in I}$ existieren, so dass die Funktionen $u\eta_i$, $i \in I$, messbar auf M sind.*
Gilt zusätzlich

$$\sum_{i\in I} \int_{V_i} |u|\eta_i \, dS < \infty,$$

so heißt u **integrierbar auf** *M, und*

$$\int_M u \, dS := \sum_{i\in I} \int_{V_i} u\eta_i \, dS$$

heißt das **Oberflächenintegral** *von u auf M.*

3.5 Tangentialräume

Definition 3.5.1. (Tangentialvektor und Tangentialraum)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* **Tangentialvektor an M in a,** *falls eine C^1-Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$\gamma(0) = a \quad \textit{und} \quad \gamma'(0) = v.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M in a heißt der **Tangentialraum von M in a** *und wird mit*

$$T_a(M)$$

bezeichnet.

Satz 3.5.2. (Dimension des Tangentialraums)**.**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Dann ist der Tangentialraum T_aM ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.5.3. (Normalenraum)**.**
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $a \in M$. Der **Normalenraum** *von M in a ist das orthogonale Komplement des Tangentialraums:*

$$N_aM := (T_aM)^\perp.$$

Beispiel 3.5.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ implizit durch eine C^1-Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben mit

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\},$$

und sei $a \in M$. Dann gilt

$$T_aM = \operatorname{span}\{\nabla f_1(a), \ldots, \nabla f_m(a)\}^\perp.$$

Insbesondere für die Einheitssphäre

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} \quad \text{mit} \quad f(x) = |x|^2 - 1$$

ist

$$\nabla f(x) = 2x.$$

Für $a \in S^{n-1}$ folgt daher

$$T_aS^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n : a \cdot v = 0\}.$$

Der Tangentialraum ist also die Hyperebene durch den Ursprung, die orthogonal auf dem Vektor a steht.

Definition 3.5.5. (Einheitsnormalenfeld)**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Unter einem* **Einheitsnormalenfeld** *auf M verstehen wir eine stetige Abbildung*

$$\nu : M \to \mathbb{R}^n,$$

so dass für alle $x \in M$ gilt:

$$\nu(x) \perp T_x M \quad \textit{und} \quad |\nu(x)|^2 = 1.$$

Lemma 3.5.6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale, wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M entweder kein oder genau zwei Einheitsnormalenfelder.*

Definition 3.5.7. (Orientierbarkeit)**.** *Eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* **orientierbar***, falls sie ein Einheitsnormalenfeld ν besitzt. In diesem Fall nennt man (M, ν) eine* **orientierte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit** *im $\mathbb{R}^n$.*

Beispiel 3.5.8. (a) Die Sphäre

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x|^2 = 1\}$$

ist orientierbar. Die beiden Einheitsnormalenfelder sind gegeben durch

$$\nu_\pm(x) := \pm x.$$

(b) Das Möbiusband ist nicht orientierbar .

3.6 Globale Integralsätze

Definition 3.6.1. (C^1-Rand)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir sagen, dass Ω einen* **C^1-Rand** *besitzt, falls für alle $a \in \partial\Omega$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f \in C^1(U)$ existieren, so dass $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ gilt und*

a) $\partial\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$

b) $\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}$

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet mit C^1-Rand, so liegt Ω lokal um jeden Randpunkt $x \in \partial\Omega$ immer nur auf einer Seite des Randes.
Außerdem ist der Rand so regulär (nämlich eine C^1-Untermannigfaltigkeit), dass an jedem Randpunkt eine eindeutig bestimmte Normale existiert.

Lemma 3.6.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand. Dann ist $\partial\Omega$ orientierbar und es existiert genau ein Einheitsnormalenfeld*

$$\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$$

an $\partial\Omega$, das nach außen zeigt, d.h.

$$\forall a \in \partial\Omega \;\; \exists \varepsilon > 0 : a + t\,\nu(a) \notin \Omega \quad \textit{für alle } t \in (0, \varepsilon).$$

Der Vektor $\nu(a)$ heißt **äußerer (Einheits-)Normalvektor** *an $\partial\Omega$ in a.*

Bemerkung 3.6.3. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit C^1-Rand und lokal beschrieben durch

$$\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) < 0\}, \qquad \partial\Omega \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\},$$

mit $\nabla f(a) \neq 0$ für alle $a \in \partial\Omega$.
Dann ist der äußere Einheitsnormalenvektor $\nu(a)$ genau gegeben durch den normierten Gradienten:

$$\nu(a) = \frac{\nabla f(a)}{|\nabla f(a)|_2}.$$

Dieses Vorzeichen des Gradienten wählt die Richtung „nach außen“, also aus Ω heraus.

Bemerkung 3.6.4. (Divergenz und Rotation eines Vf.)**.**
Sei $F = (F_1, \ldots, F_n)$ ein C^1-Vektorfeld auf einem offenen Gebiet in $\mathbb{R}^n$. Dann ist definiert

- **Divergenz:**

$$\operatorname{div} F := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

  Sie misst die lokale Quell- bzw. Senkenstärke des Feldes.

- **Rotation (für $n = 3$):**

$$\operatorname{rot} F := \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

  Sie misst die lokale Wirbelstärke des Feldes.

Für $n \neq 3$ kann die Rotation in $\mathbb{R}^n$ über Differentialformen verallgemeinert werden, in $\mathbb{R}^2$ reduziert sich $\operatorname{rot} F$ auf einen Skalar: $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$.

Satz 3.6.5. (Integralsatz von Gauß)**.**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und sei Ω ein Gebiet mit C^1-Rand. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$ und sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Vektorfeld.
Dann gilt:

$$\int_\Omega \operatorname{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F(a) \cdot \nu(a)\, dS(a),$$

wobei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld bezeichnet.

Bemerkung 3.6.6. Im Spezialfall $n = 1$, bei zusammenhängendem Ω, ist Ω gerade ein offenes Intervall der Form $\Omega = (a, b)$, F ist ein Skalarfeld und $\operatorname{div} F = F'$.
In diesem Fall liefert der Satz von Gauß gerade den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Wir können uns daher den Satz von Gauß als eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf höhere Dimensionen vorstellen.

Lemma 3.6.7. (1. und 2. Greensche Formel)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand. Sei f (bzw. g) eine in einer offenen Umgebung von $\overline{\Omega}$ einmal (bzw. zweimal) stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt die* **erste Greensche Formel***:*

$$\int_\Omega f(x)\, \Delta g(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} f(a)\, (\nabla g(a) \cdot \nu(a))\, dS(a).$$

Im Spezialfall $f = 1$ folgt:

$$\int_\Omega \Delta g(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \nabla g(a) \cdot \nu(a)\, dS(a).$$

Ist f zusätzlich zweimal stetig differenzierbar in einer offenen Umgebung von $\overline{\Omega}$, dann gilt die **zweite Greensche Formel***:*

$$\int_\Omega (f(x)\, \Delta g(x) - g(x)\, \Delta f(x))dx = \int_{\partial\Omega} (f\, (\nabla g \cdot \nu) - g\, (\nabla f \cdot \nu))dS.$$

Bemerkung 3.6.8. Hierbei ist $\nabla g \cdot \nu$ gerade die Richtungsableitung von g in Richtung der äußeren Normalen. Häufig verwendet man hierfür die Notation

$$\partial_\nu g := \nabla g \cdot \nu.$$

Satz 3.6.9. (Satz von Stokes im R^3)**.**
Sei $M \subset \hat{V}$ eine 2-dimensionale orientierbare Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$, die durch eine Einbettung

$$\varphi \in C^2(U;\mathbb{R}^3), \quad U \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen},$$

global parametrisiert wird.
Sei $A \subset M$ eine beschränkte, offene reguläre Fläche mit Rand ∂A, der durch eine C^1-Kurve parametrisiert werden kann. Genauer: Es sei

$$\Omega := \varphi^{-1}(A) \subset U$$

offen und beschränkt, es gelte Ω beschränkt mit C^1-Rand, und es existiere eine reguläre Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$$

mit $\gamma(0) = \gamma(1)$, die das Intervall $[0,1)$ bijektiv auf $\partial\Omega$ abbildet.
Wir bezeichnen das äußere Einheitsnormalenfeld mit

$$\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2.$$

und $\overline{\Omega} \subset U$.
Dann gilt für jedes C^1-Vektorfeld

$$F : \hat{U} \to \mathbb{R}^3$$

auf einer offenen Umgebung $\hat{V} \subset \mathbb{R}^3$ von M die Identität:

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot dx = \int_A \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu(x)\, dS(x),$$

wobei der Umlaufsinn der Randkurve des Kurvenintegrals auf der linken Seite und die Normalenrichtung $\nu(x)$ (wie in (10.5) und (10.7) beschrieben) zueinander passen.

Wir schreiben in Kurzform auch mit dem Kurvenintegral $\oint$:

In $\mathbb{R}^2$:

$$\oint_{\partial\Omega} F \cdot dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

In $\mathbb{R}^3$:

$$\oint_{\partial A} F \cdot dx = \int_A (\operatorname{rot} F) \cdot \nu \, dS.$$

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. S. Neukamm; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. S. Neukamm; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.