mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

AN30: Maß & Integral

Wintersemester 2025/2026
Leitung: Prof. R. Schilling

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

1.1 σ-Algebren, Dynkin-Systeme und Maße . . . 3
Definition 1.1.1 (Sigma-Algebra) . . . 3
Definition 1.1.4 (Topologie) . . . 3
Definition 1.1.7 (Maß) . . . 4
Satz 1.1.9 (Eigenschaften von Maßen) . . . 4
Definition 1.1.12 (Dynkin-System) . . . 5
Satz 1.1.16 (Eindeutigkeit von Maßen) . . . 6
Satz 1.1.18 (Carathéodory) . . . 6

2 Meßbarkeit **7**

2.1 Meßbare Abbildungen . . . 7
Definition 2.1.1 (Meßbare Abbildung) . . . 7
Satz 2.1.4 (Bildmaß) . . . 7
2.2 Existenz und Eigenschaften meßbarer Funktionen . . . 7
Lemma 2.2.2 (Meßbarkeitskriterium) . . . 7
Lemma 2.2.6 (Sombrero) . . . 8
Korollar 2.2.8 (Komposition mb. Funktionen) . . . 9
Lemma 2.2.9 (Faktorisierungslemma) . . . 9
2.3 Integral positiv-meßbarer Funktionen . . . 9
Satz 2.3.2 (Beppo-Levi) . . . 9
Lemma 2.3.3 (Eigenschaften des Integrals) . . . 9
Lemma 2.3.5 (von Fatou) . . . 10
2.4 Integral meßbarer Funktionen . . . 10
Satz 2.4.2 (Integrabilitätskriterium) . . . 10
Lemma 2.4.5 (Dichtemaß) . . . 11

zul. geändert am 7. November 2026

3 $\mu-$Integrabilität **12**

3.1 Nullmengen . . . 12
Korollar 3.1.5 (Markov-Ungleichung) . . . 12
3.2 Konvergenzsätze . . . 13
Satz 3.2.1 (über monotone Konvergenz) . . . 13
Satz 3.2.2 (über dominierte Konvergenz) . . . 13
3.3 Parameter-Integrale . . . 14
Lemma 3.3.1 (Stetigkeitslemma) . . . 14
Lemma 3.3.2 (Differenzierbarkeitslemma) . . . 14
3.4 Riemann vs. Lebesgue - Integrale . . . 14
Satz 3.4.1 (Äquivalenz von Riemann und Lebesgue) . . . 14

4 Funktionenräume und Produktmaße **15**

4.1 Die Räume $\mathscr{L}^p(\mu)$ und $L^p(\mu)$ . . . 15
Lemma 4.1.3 (Youngsche Ungleichung) . . . 15
Satz 4.1.4 (Höldersche Ungleichung) . . . 15
Korollar 4.1.5 (Cauchy–Schwarz-Ungleichung) . . . 16
Korollar 4.1.6 (Minkowski-Ungleichung) . . . 16
Satz 4.1.11 (Riesz-Fischer) . . . 17
Satz 4.1.13 (L^p- dominierte Konvergenz) . . . 17
Satz 4.1.14 (F. Riesz) . . . 17
Satz 4.1.16 (Jensen) . . . 18
4.2 Produktmaße . . . 18
Satz 4.2.2 (Eindeutigkeit von Produktmaßen) . . . 18
Satz 4.2.3 (Existenz von Produktmaßen) . . . 18
Satz 4.2.6 (Tonelli) . . . 19
Satz 4.2.7 (Fubini) . . . 19

1 Einführung

1.1 σ-Algebren, Dynkin-Systeme und Maße

Definition 1.1.1 (Sigma-Algebra)**.** *Sei E eine Menge. Eine Familie $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(E)$ heißt σ-Algebra, wenn gilt:*

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. $A \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathscr{A}$
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Korollar 1.1.2. *Sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra. Dann gilt weiterhin*

1. $E \in \mathscr{A}$
2. $A, B \in \mathscr{A} \;\Rightarrow\; A \setminus B,\; A \cup B,\; A \cap B \in \mathscr{A}$
3. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A} \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Satz 1.1.3. *Sei $(\mathscr{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele σ-Algebren über gleichem Grundraum E. Dann gilt:*

1. *$\mathscr{A} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{A}_i$ ist eine σ-Algebra.*
2. *$\forall \mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ existiert eine minimale σ-Algebra $\sigma(\mathscr{G})$*

Definition 1.1.4 (Topologie)**.** *Eine Familie von Mengen $\mathscr{O}$ heißt Topologie über einem Grundraum E, falls gilt:*

1. $\emptyset, E \in \mathscr{O}$
2. $U, V \in \mathscr{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathscr{O}$
3. $(U_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{O} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \in \mathscr{O}$

Definition 1.1.5. *Sei $\mathscr{O}$ die Topologie der offenen Mengen im $\mathbb{R}^d$, dann ist $\sigma(\mathscr{O}) =: \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borelsche σ-Algebra. Alle Mengen in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ heißen Borel-Mengen.*

Satz 1.1.6. *Seien $\mathscr{O}, \mathscr{C}, \mathscr{K}$ die offenen, abgeschlossenen und kompakten Mengen im $\mathbb{R}^d$. Es gilt:*

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathscr{O}) = \sigma(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{K})$$

sogar mehr: Die Borel-Mengen werden von offenen oder halboffenen Rechtecken mit rationalen oder irrationalen Intervalllängen erzeugt.

Definition 1.1.7 (Maß)**.** *Ein positives Maß $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ist eine Abbildung mit*

1. *$\mathscr{A}$ ist σ-Algebra*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$*
3. *$(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ paarweise disjunkt, dann ist $\mu(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$*

Falls μ nur $2, 3$ erfüllt, dann heißt μ Prämaß.

Definition 1.1.8. *Sei μ Maß auf E mit σ-Algebra $\mathscr{A}$. Dann heißt:*

1. *$(E, \mathscr{A})$ Meßraum*
2. *$(E, \mathscr{A}, \mu$ Maßraum*
3. *$\mu(E) < \infty$ endliches Maß*
4. *$\mu(E) = 1$ W-Maß*
5. *$\exists (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $A_i \uparrow E$ und $\mu(A_i) < \infty \; \forall i \in \mathbb{N}$ σ- endliches Maß*

Satz 1.1.9 (Eigenschaften von Maßen)**.** *Sei $(E, \mathscr{A}, \mu)$ Maßraum, dann gilt $\forall A, B \in \mathscr{A}$ und $A_i, B_i \subset \mathscr{A}$:*

1. *$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$*
2. *$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$*
3. *$A \subset B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$*
4. *$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$*
5. *$\mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$*
6. *$A_i \uparrow A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Rightarrow \mu(A) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$*
7. *$B_i \downarrow B \;\&\; \mu(B_1) < \infty := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i \Rightarrow \mu(B) = \inf_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \mu(B_i)$*

8. $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

Definition 1.1.10. *Das d-dim. Lebesgue-Maß λ^d ist definiert als*

$$\lambda^d : \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$$

und es gilt:

1. $\lambda^d(x + B) = \lambda^d(B),\ x \in \mathbb{R}^s$ *(translationsinvariant)*
2. $\lambda^d(R^-1(B)) = \lambda(B)$, *wobei* $R \in O(d, \mathbb{R})$ *(bewegungsinvariant)*
3. $\lambda^d(M^{-1}(B)) = \lambda^d(B) \cdot |\det(M)|^{-1}$

Lemma 1.1.11. *Sei $(E, \mathscr{A})$ Meßraum, $\mu : \mathscr{A} \to \infty$ endlich additive Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0, \mu(E) < \infty$. Dann ist μ genau dann ein Maß, falls eine der drei Dinge erfüllt ist:*

1. *μ ist stetig von oben, $A_i \uparrow A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Rightarrow \mu(A_i) \uparrow \mu(B_i)$*
2. *μ ist stetig von unten, $A_i \downarrow A := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Rightarrow \mu(A_i) \downarrow \mu(B_i)$*
3. *μ ist stetig bei "Null": wie 2) nur $B = \emptyset$*

Definition 1.1.12 (Dynkin-System)**.** *Eine Familie $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(E)$ heißt Dynkin-System, falls*

1. *$E \in \mathscr{D}$*
2. *$D \in \mathscr{D} \Rightarrow D^C \in \mathscr{D}$*
3. *$D_{i\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \mathscr{D}$ (schwächer als σ-Algebra)*

Satz 1.1.13. *Für alle $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ existiert ein minimales Dynkin-System $\mathscr{D}$ mit $\mathscr{G} \subset \mathscr{D}$ (schreibe $\mathscr{D} =: \delta(\mathscr{G})$). Weiterhin*

$$\mathscr{G} \subset \delta(\mathscr{G}) \subset \sigma(\mathscr{G})$$

Lemma 1.1.14. *$\mathscr{D}$ Dynking-System und $\cap$-stabil $\Leftrightarrow$ $\mathscr{D}$ ist σ-Algebra*

Lemma 1.1.15. *$\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$ und $\cap$-stabil $\Rightarrow \delta(\mathscr{G}) = \sigma(\mathscr{G})$*

Satz 1.1.16 (Eindeutigkeit von Maßen)**.** *Sei $(E, \mathscr{A})$ ein Meßraum, μ, ν Maße auf $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{G})$ mit*

a) $\mathscr{G}$ ist $\cap$-stabil

b) $\exists (G_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G},\ G_i \uparrow E$ und $\mu(G_i) < \infty, \nu(G_i) < \infty,\ \forall i \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\mu|_{\mathscr{G}} = \nu|_{\mathscr{G}} \Rightarrow \mu|_{\sigma(\mathscr{G})} = \nu|_{\sigma(\mathscr{G})}$$

Definition 1.1.17. *Eine Familie von Mengen $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(E)$ heißt Halbring über E, falls*

1. $\emptyset \in \mathscr{S}$
2. $S, T \in \mathscr{S} \Rightarrow S \cap T \in \mathscr{S}$
3. $\forall S, T \in \mathscr{S}\ \exists S_1, ..., S_m \in \mathscr{S},\ m < \infty$, *paarweise disjunkt, sodass* $S \setminus T = \bigsqcup_{i=1}^{m} S_i = \mathscr{S}$

Satz 1.1.18 (Carathéodory)**.** *Sei $\mathscr{S}$ ein Halbring auf E und sei $\mu : \mathscr{S} \to [0, \infty]$ Prämaß, d.h.*

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} S_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(S_i)\ \forall S_i \in \mathscr{S}$ pw. disjunkt (also auf $\mathscr{S}$ σ-additiv)

Dann existiert eine Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathscr{S})$, sodass μ ein Maß ist. Falls zusätzlich Satz 1.1.16 b) erfüllt ist, dann ist diese Fortsetzung sogar eindeutig.

2 Meßbarkeit

2.1 Meßbare Abbildungen

Definition 2.1.1 (Meßbare Abbildung)**.** *Seien $(E, \mathscr{A}), (E, \mathscr{A}')$ zwei Meßräume. Eine Abbildung $T : E \to E'$ heißt $\mathscr{A}/\mathscr{A}'$ -meßbar, falls*

$$\forall A' \in \mathscr{A}' : \ T^{-1}(A') \in \mathscr{A}' \quad bzw. \quad T^{-1}(\mathscr{A}') \subset \mathscr{A}$$

Lemma 2.1.2. *Sei $\mathscr{A}' = \sigma(\mathscr{G}')$ für $\mathscr{G}' \subset \mathscr{P}(E')$. Dann gilt:*

$$T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}' \text{ ist } \mathscr{A}/\mathscr{A}' \text{ -mb.} \iff \forall G' \in \mathscr{G}' : T^{-1}(G') \in \mathscr{A}$$

Es reicht also T am Erzeuger zu untersuchen.

Korollar 2.1.3. *Seien $S, T : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ meßbare Funktionen. Dann ist*

$$S + T, S \cdot T, S \circ T$$

wieder meßbar.

Satz 2.1.4. (Bildmaß)**.** *Sei $T : (E, \mathscr{A}) \to (E', \mathscr{A}')$ eine meßbare Abbildung und ν ein Maß auf (E, A). Dann definiert*

$$\mu(A') = \nu(T^{-1}(A'))$$

ein Maß auf $(E, \mathscr{A}')$. Dieses nennen wir Bildmaß von ν unter T (schreibe $T(\nu), \nu \circ T^{-1}$)

2.2 Existenz und Eigenschaften meßbarer Funktionen

Definition 2.2.1. *Eine Funktion $u : E \to \mathbb{R}$ heißt meßbar, falls $u : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine $\mathscr{A}/\mathscr{B}(\mathbb{R})$- meßbare Abbildung ist. Schreibe:*

- $\{u \in B\} = \{x \in E | u(x) \in B\} = u^{-1}(B)$
- $\{u \geq w\} = \{x \in E | u(x) \geq w(x)\}$ *(analog $>, \leq, <, =, \neq$)*
- $\{u \geq \alpha\} = \{x \in E | u(x) \geq \alpha\} = u^{-1}([\alpha, \infty))$ *(analog $>, \leq, <, =, \neq$)*

Lemma 2.2.2. (Meßbarkeitskriterium)**.** *$u : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ ist genau dann meßbar, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

1. $\{u > \alpha\} \in \mathscr{A}$
2. $\{u \geq \alpha\} \in \mathscr{A}$
3. $\{u \leq \alpha\} \in \mathscr{A}$
4. $\{u < \alpha\} \in \mathscr{A}$

für alle α aus $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ oder einer anderen dichten Teilmenge aus $\mathbb{R}$.

Definition 2.2.3. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *ist die Zwei-Punkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$. Es übertragen sich die Begriffe:*

- $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\mathscr{B}(\mathbb{R}), \{\emptyset, \{\infty\}, \{-\infty\}, \{\pm\infty\}\})$
- $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cap \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *Spur-σ-Algebra*
- $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *wird erzeugt durch* $[a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Definition 2.2.4. *Es sind $\mathscr{L}^0(\mathscr{A})$ bzw. $\mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$ die Mengen der meßbaren bzw. $\overline{\mathbb{R}}$-wertig meßbaren Funktionen $u : (E, \mathscr{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))/(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Wir schreiben auch $\mathscr{L}^{0,+}(\mathscr{A})$ für diejedingen u's die positiv und meßbar sind.*

Definition 2.2.5. *Die Menge der einfachen Funktionen $\mathscr{E}(\mathscr{A})$ ist definiert durch*

$$\mathscr{E}(\mathscr{A}) := \left\{ g \in \mathscr{L}^0(\mathscr{A}) |\ g(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \mathbb{1}_{A_i},\ y_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \mathscr{A} \text{ pw. disjunkt} \right\}$$

Lemma 2.2.6. (Sombrero)**.** *Sei $u \in \mathscr{L}^{0,+}(\mathscr{A})$. Dann existieren $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{E}(\mathscr{A})$ mit $f_n \geq 0,\ f_{n+1} \geq f_n \geq ...$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = u(x)$. Zusätzlich gilt:*

1. *$f_n \to u$ gleichmäßig, falls $|u| < \infty$*
2. *$u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ist Limes von f_n mit $|f_n| \leq |u_n|$*

Korollar 2.2.7. *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. Dann gilt:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n,\ \limsup_{n\in\mathbb{N}} u_n,\ \liminf_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$$

Falls $\lim_{n\in\mathbb{N}} u_n$ existiert, dann auch $\lim_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$.

Korollar 2.2.8. (Komposition mb. Funktionen). *Seien $u, v : E \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}/\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$- meßbar, dann ist:*

$$u + v,\ u \cdot v,\ \max\{u, v\},\ \min\{u, v\}$$

wieder meßbar. Falls $v^{-1}(\{+\infty\}) = \emptyset$, dann auch $u - v$ meßbar.

Lemma 2.2.9. (Faktorisierungslemma). *Es sei $T : (E, \mathscr{A}) \to (E', \mathscr{A}')$ eine $\mathscr{A}/\mathscr{A}'-$ meßbare Abbildung. Dann ist folgendes äquivalent:*

i. $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist $\sigma(T)/\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$- meßbar*

ii. Es existiert ein $w : (E', \mathscr{A}') \to \mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}})$ meßbar, sodass $u = w \circ T$.

2.3 Integral positiv-meßbarer Funktionen

Definition 2.3.1. *Es sei $u \in \mathscr{L}^{0,+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. Das μ-Integral von u ist definiert als:*

$$\int_E u \, \mathrm{d}\mu := \sup\{I_\mu(g) \mid g \in \mathscr{E}^+(\mathscr{A}), g \leq u\}$$

wobei $I_\mu(\sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \mu(A_i)$

Satz 2.3.2. (Beppo-Levi). *Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^{0,+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ aufsteigend, also $u_1 \leq u_2 \leq \cdots$. Dann gilt:*

i. $u := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *meßbar und nicht-negativ*

ii. $\int \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \, \mathrm{d}\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$

Lemma 2.3.3 (Eigenschaften des Integrals). *Seien $u, w \in \mathscr{L}^{0,+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$, $A \in \mathscr{A}$. Dann gilt:*

1. $\int \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$
2. $\int \alpha u \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int u \, \mathrm{d}\mu$ *wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ (pos. homogen)*
3. $\int u + w \, \mathrm{d}\mu = \int u \, \mathrm{d}\mu + \int w \, \mathrm{d}\mu$ *(additiv)*
4. $u \leq w \Longrightarrow \int u \, \mathrm{d}\mu \leq \int w \, \mathrm{d}\mu$ *(monoton)*

Lemma 2.3.4. *Sei* $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A}),\ w_i > 0$. *Dann gilt*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} w_i \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A}) \quad \textit{und} \quad \int \sum_{i\in\mathbb{N}} w_i \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int w_i \,\mathrm{d}\mu \in [0,\infty]$$

Lemma 2.3.5. (von Fatou)**.** *Sei* $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A}),\ u_i \geqslant 0$. *Dann ist*

$$u := \liminf_{i\in\mathbb{N}} u_i \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A}) \quad \textit{und} \quad \int \liminf_{i\in\mathbb{N}} u_i \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{i\in\mathbb{N}} \int u_i \,\mathrm{d}\mu \in [0,\infty]$$

2.4 Integral meßbarer Funktionen

Definition 2.4.1. *Eine Funktion* $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *heißt* $\mu-$*integrierbar, falls*

1. $u \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$
2. $\int \max\{u,0\} \,\mathrm{d}\mu,\ \int \min\{u,0\} \,\mathrm{d}\mu < \infty$

Dann heißt

$$\int u \,\mathrm{d}\mu := \int \max\{u,0\} \,\mathrm{d}\mu - \int \min\{u,0\} \,\mathrm{d}\mu$$

$\mu-$*Integral. Wir bezeichnen mit*

$$\mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(E,\mathscr{A},\mu)$$

den Raum aller $\overline{\mathbb{R}}-$*wertig* $\mu-$*integrierbaren Funktionen*

Satz 2.4.2. (Integrabilitätskriterium)**.** *Sei* $u \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. *Dann ist äquivalent*

a) $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$

b) $u^+ := \max\{u,0\}, u^- := \min\{u,0\} \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$

c) $|u| \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$

d) $\exists w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu), w \geqslant 0$ *mit* $|u| \leqslant w$

Korollar 2.4.3. *Seien* $u, w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu), \alpha \in \mathbb{R}$. *Dann*

1. $\alpha u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *und* $\int \alpha u \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int u \,\mathrm{d}\mu$ *(homogen)*
2. $u + w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *und* $\int u + w \,\mathrm{d}\mu = \int u \,\mathrm{d}\mu + \int w \,\mathrm{d}\mu$ *(additiv)*

3. $\max\{u, w\} \min\{u, w\} \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *(Verband)*

4. $u \leq w \Rightarrow \int u \, \mathrm{d}\mu \leqslant \int w \, \mathrm{d}\mu$ *(monoton)*

5. $| \int u \, \mathrm{d}\mu | \leqslant \int | u | \, \mathrm{d}\mu$ *(Dreiecksungleichung)*

Definition 2.4.4. *Sei $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ oder $\mathscr{L}^{0,+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. Dann ist*

$$\int_A u \, \mathrm{d}\mu := \int u(x) \mathbb{1}_A(x) \mu(dx)$$

Lemma 2.4.5. (Dichtemaß)**.** *Sei $u \in \mathscr{L}^{0,+}_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. Dann ist für alle $A \in \mathscr{A}$*

$$A \mapsto \nu(A) := \int_A u \, \mathrm{d}\mu$$

ein Maß (mit Dichte u) auf $(E, \mathscr{A})$

3 $\mu-$Integrabilität

3.1 Nullmengen

Definition 3.1.1. *Es sei $(E, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

1. *Wir bezeichenen mit $\mathscr{N}_\mu := \{N \in \mathscr{A} \mid \mu(N) = 0\}$ die meßbaren $\mu-$Nullmengen*
2. *Eine Eigenschaft $\Pi(x)$ gilt $\mu-$fast-überall (μ-fü), wenn*

$$\{x \in E \mid \Pi(x) \text{ gilt nicht}\} \subset N \in \mathscr{N}_\mu$$

Satz 3.1.2. *Sei $u \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$. Dann ist*

a) $\int |u| \, \mathrm{d}\mu = 0 \iff |u| = 0 \;\; \mu-\text{fü} \iff \mu\{u \neq 0\} = 0$

b) $N \in \mathscr{N}_\mu \Longrightarrow \int_N u \, \mathrm{d}\mu = 0$

Korollar 3.1.3. *Es seien $u, w \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A})$ und $u = w$ $\mu-$fü. Dann gilt*

a) $u, w \geqslant 0 \Longrightarrow \int u \, \mathrm{d}\mu = \int w \, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty]$

b) $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \Longleftarrow w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *und* $\int u \, \mathrm{d}\mu = \int w \, \mathrm{d}\mu$

Korollar 3.1.4. *Seien $u \in \mathscr{L}^0_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathscr{A}), w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$. Dann gilt*

$$|u| \leq w \;\; \mu - \text{fü} \Longrightarrow u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$$

Korollar 3.1.5. (Markov-Ungleichung)**.** *Für $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu), A \in \mathscr{A}, c > 0$*

1. $\mu(\{|u| > c\} \cap A) \leq \frac{1}{c} \int_A |u| \, \mathrm{d}\mu$
2. $\mu(\{|u| > c\}) \leq \frac{1}{c} \int |u| \, \mathrm{d}\mu$

Korollar 3.1.6. *Für jedes $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ existiert ein $\tilde{u} \in \mathscr{L}^1(\mu)$ $\mathbb{R}-$wertig mit $u = \tilde{u}$ $\mu-$fü (Jedes integrierbare $\overline{\mathbb{R}}-$wertige u ist auf Nicht-Null-Mengen reellwertig)*

3.2 Konvergenzsätze

Satz 3.2.1. (über monotone Konvergenz)**.**

a) Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$ *mit* $u_1 \leq \cdots \leq u := \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ $(u_n \uparrow u)$*. Dann gilt*

$$u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \Longleftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$$

genauso wie

$$\int u \, \mathrm{d}\mu = \int \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu$$

b) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1(\mu)$ *mit* $w_1 \geq \cdots \geq w := \inf_{n\in\mathbb{N}} w_n$ $(w_n \downarrow w)$*. Dann gilt*

$$w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu) \Longleftrightarrow \inf_{n\in\mathbb{N}} \int w_n \, \mathrm{d}\mu > -\infty$$

genauso wie

$$\int u \, \mathrm{d}\mu = \int \inf_{n\in\mathbb{N}} u_n \, \mathrm{d}\mu = \inf_{n\in\mathbb{N}} \int u_n \, \mathrm{d}\mu$$

Satz 3.2.2. (über dominierte Konvergenz)**.** *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *und es gelte*

1. $u_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x) \quad \forall x \in E$ *(u_n konvergiert punktweise)*
2. $\exists w \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$ *und* $\forall n \in \mathbb{N}, x \in E : |u(x)| \leqslant w(x)$ *(Es gibt eine integrierbare Majorante).*

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n \, \mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} u_n \, \mathrm{d}\mu = \int u \, \mathrm{d}\mu$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int |u_n - u| \, \mathrm{d}\mu = 0$$

3.3 Parameter-Integrale

Lemma 3.3.1. (Stetigkeitslemma). *Es sei* $u : (a,b) \times E \to \mathbb{R}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *offen und es gelte:*

1. $x \mapsto u(t,x) \in \mathscr{L}^1(\mu) \quad \forall t \in (a,b)$ *fest*
2. $t \mapsto u(t,x)$ *stetig* $\quad \forall x \in E$ *fest*
3. $|u(t,x)| \leqslant w(x) \quad \forall t \in (a,b), x \in E$ *und ein festes* $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$

Dann ist

$$t \mapsto U(t) := \int u(t,x)\mu(dx) \in \mathbb{R}$$

stetig auf (a,b)

Lemma 3.3.2. (Differenzierbarkeitslemma). *Es sei* $u : (a,b) \times E \to \mathbb{R}$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *offen und es gelte:*

1. $x \mapsto u(t,x) \in \mathscr{L}^1(\mu) \quad \forall t \in (a,b)$ *fest*
2. $t \mapsto u(t,x)$ *differenzierbar* $\quad \forall x \in E$ *fest*
3. $|\partial_t u(t,x)| \leqslant w(x) \quad \forall (t,x) \in (a,b) \times E$ *und ein festes* $w \in \mathscr{L}^1(\mu)$

Dann ist

$$t \mapsto U(t) := \int u(t,x)\mu(dx) \in \mathbb{R}$$

differenzierbar auf (a,b) *und*

$$\frac{d}{dt}U(t) = \frac{d}{dt}\int u(t,x)\mu(dx) = \int \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\mu(dx)$$

3.4 Riemann vs. Lebesgue - Integrale

Satz 3.4.1. (Äquivalenz von Riemann und Lebesgue). *Es sei* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Borel-meßbar und Riemann-Integrierbar. Dann gilt:*

$$u \in \mathscr{L}^1([a,b],\lambda) \quad \textit{und} \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} u \, \mathrm{d}\lambda$$

4 Funktionenräume und Produktmaße

4.1 Die Räume $\mathscr{L}^p(\mu)$ und $L^p(\mu)$

Definition 4.1.1. *Sei $(E, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $p \in [1, \infty]$ bezeichnen wir mit*

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \{u : E \to \mathbb{R} | u \text{ meßbar}, \int |u|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty\}$$

den Raum der $p-$integrierbaren Funktionen. Insbesondere definiere für $p = \infty$

$$\mathscr{L}^\infty(\mu) = \{u : E \to \mathbb{R} | u \text{ meßbar}, \exists c > 0 : \mu(\{|u| \geqslant c\}) = 0\}$$

Wir schreiben

$$\|u\|_p := \left(\int |u|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

für $1 \geqslant p < \infty$ und ansonsten

$$\|u\|_\infty := \inf\{c > 0, \mu(\{|u| \geqslant c\}) = 0\}$$

Korollar 4.1.2. *Aus der Definition folgt unmittelbar, dass*

1. $u(x) \leqslant \|u\|_\infty$ *µfü*
2. $|u(x)| \leqslant c$ *µfü* $\Longrightarrow \|u\|_\infty \leqslant c$
3. $u \mapsto \|u\|_p$ *verhält sich im Wesentlichen wie eine Halbnorm.*

Lemma 4.1.3. (Youngsche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt für alle $a, b \geq 0$*

a) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

b) Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q \Longleftrightarrow b = a^{p-1}$

Satz 4.1.4. (Höldersche Ungleichung)**.** *Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $u \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $w \in \mathscr{L}^q(\mu)$ Dann gilt*

a) $|\int uw \, \mathrm{d}\mu| \leq \int |uw| \, \mathrm{d}\mu \leq \|u\|_p \|w\|_q$.

b) Insbesondere gilt $uw \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Korollar 4.1.5. (Cauchy–Schwarz-Ungleichung)**.** *Seien $u, w \in \mathscr{L}^2(\mu)$. Dann gilt*

a) $\int |uw| \ \mathrm{d}\mu \leq \|u\|_2 \, \|w\|_2$.

b) Insbesondere gilt $uw \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Korollar 4.1.6. (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei $p \in [1, \infty)$ und $u, w \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Dann gilt*

a) $\|u + w\|_p \leq \|u\|_p + \|w\|_p$.

b) Insbesondere gilt $u + w \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

Bemerkung 4.1.7.

a) Satz 4.1.4 besagt, dass wenn $u, w \in \mathscr{L}^p(\mu)$, dann auch $\alpha u + \beta w \in \mathscr{L}^p(\mu) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wir sind also sehr motiviert $\mathscr{L}^p(\mu)$ als Vektorraum zu betrachten.

b) Da aber aus $\|u\|_p = 0 \Longrightarrow u = 0$ nur μ–fü ist $\mathscr{L}^p(\mu)$ nur seminormierter Raum.

Definition 4.1.8. *Wir definieren daher die Relation $\sim$ wiefolgt:*

$$u \sim w \Longleftrightarrow \mu(\{u \neq w\}) = 0$$

Sodass die Äquivalenzklassen

$$[u] = \{w \in \mathscr{L}^p(\mu) \mid w \sim u\}$$

entstehen. Insbesondere übertragen sich die Seminormen $\|\cdot\|_p$ zu

$$\|[u]\|_p := \inf\{\|w\|_p \mid w \in [u]\}$$

Wir bezeichnen mit $L^p(\mu)$ den Raum $\mathscr{L}^p(\mu)$ modulu dieser Relation, also

$$L^p(\mu) := \mathscr{L}^p(\mu)/_\sim$$

Dann ist in der Tat $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ein normierter Vektorraum. Im Zuge dessen sind alle künftigen Relationen immer als "geltend bis auf Ausnahme-Nullmengen fast überall" zu verstehen.

Definition 4.1.9. *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu), u \in \mathscr{L}^p(\mu)$ *und* $p \in [1,\infty]$. *Dann meint*

$$(a) \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} u \iff L^p - \lim_{n\to\infty} u_n = u \iff \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_p = 0$$

und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu)$ *heißt* L^p-*Cauchy Folge, falls*

$$(b) \quad \forall \epsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n,k \geqslant N : \; \|u_n - u_k\|_p < \epsilon$$

Lemma 4.1.10. *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu), u_n \geqslant 0$ *und* $p \in [1,\infty]$. *Dann gilt*

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \right\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_p$$

Satz 4.1.11. (Riesz-Fischer)**.** *Def. 4.1.9* (a) *und 4.1.9* (b) *sind äquivalent. Bzw:*

$L^p(\mu)$, $p \in [1,\infty]$ *ist ein* Banach*-Raum, jede Cauchy-Folge konvergiert.*

Korollar 4.1.12. *Sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu), p \in [1,\infty]$ *mit* $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} u$. *Dann exisitiert eine Teilfolge* $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$u_{n_k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \mu - fu$$

Satz 4.1.13. (L^p- dominierte Konvergenz)**.** *Es sei* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu), p \in [1,\infty)$ *mit* $|u_n| \leqslant w$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ μ*-fü und ein* $w \in \mathscr{L}^p(\mu)$.
Falls $u_{n_k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \mu-$*fü, dann gilt* $u \in \mathscr{L}^p(\mu)$ *und*

$$(a) \quad \|u_n - u\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (b) \quad \|u_n\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|_p$$

Satz 4.1.14. (F. Riesz)**.**
Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^p(\mu), p \in [1,\infty)$ *und es gelte:* $u_n \to u$ $\mu-$*fü und* $u \in \mathscr{L}^p(\mu)$. *Dann*

$$\|u_n - u\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \iff \quad \|u_n\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|_p$$

Definition 4.1.15. *Eine Funktion* $V : I \to \mathbb{R}$ *heißt konvex, falls* $\forall [a,b] \subset I$ *gilt:*

$$\forall x,y \in [a,b], t \in (0,1) \quad V(tx + (1-t)y) \leqslant tV(x) + (1+t)V(y)$$

Satz 4.1.16. (Jensen). *Sei $V : [0,\infty) \to [0,\infty)$ konvex und $V(0^+) = V(0)$ stetig. Sei μ ein W-Maß auf $(E, \mathscr{A})$. Dann gilt:*

$$V\left(\int u \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int V(u) \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $u \in \mathscr{L}^{0,+}(\mathscr{A})$

4.2 Produktmaße

Definition 4.2.1. *Seien $(E, \mathscr{A}), (F, \mathscr{B})$ zwei Meßräume. Dann heißt*

1. *$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} := \sigma(\mathscr{A} \times \mathscr{B})$ die Produkt-σ-Algebra*
2. *$(E, \mathscr{A}) \otimes (F, \mathscr{B}) := (E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ der Produkt-Meßraum*

Satz 4.2.2. (Eindeutigkeit von Produktmaßen). *Seien $(E, \mathscr{A}, \mu), (F, \mathscr{B}, \nu)$ zwei Maßräume, wo $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{E})$ und $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{F})$ und*

i) $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ sind $\cap-$stabil

ii) $\exists E_i \subset \mathscr{E}, F_k \subset \mathscr{F}$ mit $E_i \uparrow E$ und $F_k \uparrow F$ sowie $\mu(E_i), \nu(F_i) < \infty$

Dann existiert höchstens ein Maß ρ auf $(E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$ mit

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \times B \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$$

Satz 4.2.3. (Existenz von Produktmaßen). *Es seien $(E, \mathscr{A}, \mu), (F, \mathscr{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann hat ρ aus Satz 4.2.2 eine eindeutige Fortsetzung zu einem $\sigma-$endlichem Maß auf $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ und $\forall U \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ gilt:*

$$\rho(U) = \int_E \left(\int_F \mathbb{1}_U(x,y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E \mathbb{1}_U(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Das liefert auch die entsprechenden Meßbarkeiten der Funktionen

$$y \mapsto \mathbb{1}_U(x,y), \quad y \mapsto \int \mathbb{1}_U(x,y)\mu(dx), \quad x \mapsto \mathbb{1}_U(x,y), \quad x \mapsto \int \mathbb{1}_U(x,y)\nu(dy)$$

Definition 4.2.4. *Seien $(E, \mathscr{A}, \mu), (F, \mathscr{B}, \nu)$ zwei $\sigma-$endliche Maßräume. Dann heißt*

i) $(E, \mathscr{A}, \mu) \otimes (F, \mathscr{B}, \nu) := (E \times F, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \rho)$ Produktmaßraum und

ii) $\rho := \mu \otimes \nu$ aus Satz 4.2.3 mit $\rho \mid_{\mathscr{A} \times \mathscr{B}} = \mu(A) \cdot \nu(B)$ das Produktmaß.

Korollar 4.2.5. $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d)$ *ist Iteration von* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$

$$(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda^d) = \bigotimes_{i=1}^{d} (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda^1)$$

Satz 4.2.6. (Tonelli)**.** *Es seien* $(E, \mathscr{A}, \mu), (F, \mathscr{B}, \nu)$ *zwei* $\sigma-$*endliche Maßräume und* $u : E \times F \to [0, \infty]$ *sei* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}-$*meßbar. Dann gilt:*

a) $x \mapsto u(x, y), \quad y \mapsto u(x, y)$ *sind* $\mathscr{A}-$ *bzw.* $\mathscr{B}$*–meßbar*

b) $x \mapsto \int u(x, y)\nu(dy), \quad y \mapsto \int u(x, y)\mu(dx)$ *sind* $\mathscr{A}-$ *bzw.* $\mathscr{B}$*–meßbar und*

c) $$\int_{E\times F} u(x, y)(\mu\otimes\nu)(d(x, y)) = \int_E \left(\int_F u(x, y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E u(x, y)\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Korollar 4.2.7. (Fubini)**.** *Es seien* $(E, \mathscr{A}, \mu), (F, \mathscr{B}, \nu)$ *zwei* σ*-endliche Maßräume und* $u : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}$ *sei* $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$*-meßbar. Falls eine der folgenden Integrale*

$$\int \int |u| \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{d}\nu, \quad \int \int |u| \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu, \quad \int |u| \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu)$$

endlich ist, dann gilt:

a) $u \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu \otimes \nu)$

b) $x \mapsto u(x, y) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ *für* ν*-fast alle* y

c) $y \mapsto u(x, y) \in \mathscr{L}^1(\nu)$ *für* μ*-fast alle* x

d) $x \mapsto \int_F u(x, y) \, \mathrm{d}\nu \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\mu)$

e) $y \mapsto \int_E u(x, y) \, \mathrm{d}\mu \in \mathscr{L}^1_{\overline{\mathbb{R}}}(\nu)$

f) $$\int_{E\times F} u(x, y)(\mu\otimes\nu)(d(x, y)) = \int_E \left(\int_F u(x, y)\nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left(\int_E u(x, y)\mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Bemerkung 4.2.8. Tonelli sagt:

„Du darfst iterieren, auch wenn alles divergiert."

Fubini sagt:

„Du darfst vertauschen, weil alles absolut konvergiert."

$\Longrightarrow$ Tonelli braucht Integrierbarkeit nicht, weil u positiv sein muss. Fubini liefert die absolute Integrierbarkeit aufgrund der Konvergenzbedingung an u.

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. R. Schilling; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. R. Schilling; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.