mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

AL20: Algebra II

Sommersemester 2026
Leitung: Prof. A. Thom, Prof. V. Alekseev

Inhaltsverzeichnis

1 Reprise **4**

1.1 Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma 4
Definition 1.1.4 (Schnitt) 5
Auswahlaxiom 1.1.5 5
Satz 1.1.9 (Zorn'sches Lemma) 5
Korollar 1.1.11 (Hamel) 6

2 Allgemeine Körpererweiterungen **7**

2.1 Grundlegende Begriffe und Erweiterung der Skalare 7
Definition 2.1.1 (Körpererweiterung) 7
Lemma 2.1.5 (Erweiterung der Skalare für Vektorräume) 8
2.2 Algebraische & Endliche Körpererweiterungen 9
Definition 2.2.1 (Grad, Algebraisch, Transzendent) 9
Lemma 2.2.2 (Endlichkeit gibt Algebraizität) 9
Lemma 2.2.3 (Minimalpolynom) 10
Lemma 2.2.4 (Gradformel) 10
Satz 2.2.6 (Turmformel) 10
Definition 2.2.7 (Zerfällungskörper) 10
Satz 2.2.8 (Existenz und Endlichkeit des Zerfällungskörpers) 10
Definition 2.2.10 (Algebraischer Abschluss) 11

3 Galoiserweiterungen **12**

3.1 Multiplikationsendomorphismen 12
Lemma 3.1.1 (Erweiterung der Skalare für Körper) 12
Lemma 3.1.3 (Begleitmatrix der Multiplikation) 12
Definition 3.1.5 (Normal, Separabel, Galois) 13

zul. geändert am 7. November 2026

3.2 Separabilität . . . 14
Korollar 3.2.5 (Endlichkeit in char 0 gibt Separabilität) . . . 14
Definition 3.2.6 (Separabilität, Allgemein) . . . 14
Lemma 3.2.7 (Ableitungskriterium) . . . 14
Definition 3.2.10 (Perfekter Körper) . . . 15
Satz 3.2.13 (vom Primitiven Element) . . . 16
3.3 Körperautomorphismen . . . 16
Lemma 3.3.2 (Artin) . . . 16
Definition 3.3.3 (Automorphismengruppe) . . . 16
Definition 3.3.5 (Galoisgruppe) . . . 17
Satz 3.3.6 (Galois-Charakterisierung durch Aut(L/K)) . . . 17
Satz 3.3.8 (Galois-Charakterisierung durch Zerfällungskörper) . . . 17
3.4 Galoiskorrespondenz . . . 18
Satz 3.4.2 (Hauptsatz der Galoistheorie) . . . 18

4 Abelsche & Radikalerweiterungen **19**

4.1 Abelianisierung und Auflösbarkeit . . . 19
Definition 4.1.1 (Abelianisierung) . . . 19
Lemma 4.1.4 (Eigenschaften auflösbarer Gruppen) . . . 19
4.2 Abelsche Erweiterungen . . . 20
Lemma 4.2.2 (Klassifikation abelscher Zwischenerweiterungen) . . . 20
Satz 4.2.5 (Kronecker–Weber) . . . 21
Definition 4.2.6 (Radikalerweiterung; durch Radikale auflösbar) . . . 21
Satz 4.2.10 (Galois-Kriterium für Radikale) . . . 21
Korollar 4.2.11 (Cardano, Ferrari) . . . 22
4.3 Konstruktion mit Zirkel und Lineal . . . 22
Definition 4.3.1 (Konstruierbare Zahl) . . . 22
Satz 4.3.2 (Algebraisches Kriterium für Konstruierbarkeit) . . . 22
Satz 4.3.5 (Fermat-Kriterium) . . . 23

5 Intermezzo **24**

5.1 Praktikable Sätze . . . 24
Satz 5.1.1 (Eisensteinkriterium für Irreduzibilität) . . . 24
Lemma 5.1.2 (Irreduzibilitätskriterium für Grad 3) . . . 24
Lemma 5.1.5 (Diskriminante für Separabilität) . . . 24
Beispiel 5.1.7 (Galoisgruppen und Körpererweiterungen) . . . 25
5.1.8 Normalität . . . 27
5.1.9 Separabilität . . . 27
5.1.10 Irreduzibilität . . . 27
5.1.11 Endlichkeit . . . 27

5.1.12 Algebraizität 27
5.1.13 Bestimmung von Galoisgruppen 27

1 Reprise

1.1 Auswahlaxiom und das Zorn'sche Lemma

Bemerkung 1.1.1. Die Motivation dieses Rückblicks ist das Schaffen eines lückenlosen logischen Fundaments für das Studium unendlich-dimensionaler Vektorräume; Zumindest in der Hinsicht, dass bei der Konstruktion der Galoistheorie keine unangenehmen Widersprüche der Mengenlehre in die Quere kommen könnten.

Lemma 1.1.2 (Linksinvertierbarkeit und Injektivität)**.** *Sei X eine nichtleere Menge. Linksinvertierbare Abbildungen $i : X \to Y$ sind genau die injektiven Abbildungen. Heißt es gilt die Äquivalenz:*

$$i : X \to Y \text{ injektiv} \iff \exists p : Y \to X : \ p \circ i = \mathrm{id}_X$$

Beweisidee. »$\Longleftarrow$«: Für $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$i(x_1) = i(x_2) \Longrightarrow p \circ i(x_1) = p \circ i(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

»$\Longrightarrow$«: Da i injektiv, ist $i : X \to i(X)$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $h : i(X) \to X$. Wähle

$$p : Y \longrightarrow X : y \longmapsto \begin{cases} h(y), \text{ falls } y \in i(X) \\ x_0, \text{ sonst} \end{cases}$$

für ein fest existierendes $x_0 \in X \neq \emptyset$. Dann gilt $p \circ i = \mathrm{id}_X$ □

Bemerkung 1.1.3 (Rechtsinvertierbarkeit und Surjektivität)**.** Tatsächlich gilt für eine endliche Menge Y auch die duale Äquivalenz

$$\pi : X \to Y \text{ surjektiv} \iff \exists s : Y \to X : \ \pi \circ s = \mathrm{id}_Y$$

Beweisidee. »$\Longleftarrow$«: Für $y \in Y$ gilt

$$\pi(s(y)) = y \Longrightarrow s(y) \in \pi^{-1}(x)$$

es existiert also zu jedem $y \in Y$ ein Urbild. »$\Longrightarrow$«: Da π surjektiv, wähle zu jedem $y \in Y$ ein $x_y \in \pi^{-1}(y)$ und definiere

$$s : Y \longrightarrow X : y \longmapsto x_y$$

wohldefiniert, da $Y \neq \emptyset$. Dann gilt $\pi \circ s = \mathrm{id}_Y$ □

Es stellt sich heraus, für eine unendliche Menge Y ist das »unendliche« wählen im zweiten Teil nicht durch die klassischen Axiome der Mengenlehre gedeckt. Es braucht die folgende axiomatische Zusatzannahme:

Definition 1.1.4 (Schnitt)**.** *Sei $\pi : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Ein Rechtsinverses $s : Y \to X$ zu π heißt Schnitt von π.*

Wir postulieren:

Auswahlaxiom 1.1.5 *Jede surjektive Abbildung hat einen Schnitt.*

Definition 1.1.6 (Halbordnung)**.** *Sei Δ eine Menge. Eine Halbordnung auf Δ ist eine Relation $\preceq$ auf Δ mit folgenden Eigenschaften:*

$\alpha \preceq \alpha$ *für alle* $\alpha \in \Delta$; *(Reflexivität)*

$\alpha \preceq \beta$ *und* $\beta \preceq \alpha \implies \alpha = \beta$ *für* $\alpha, \beta \in \Delta$; *(Antisymmetrie)*

$\alpha \preceq \beta$ *und* $\beta \preceq \gamma \implies \alpha \preceq \gamma$ *für* $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$; *(Transitivität)*

Eine Menge Δ mit einer festen Halbordnung $\preceq$ auf Δ heißt **halbgeordnet**.

Definition 1.1.7 (Totalordnung)**.** *Eine Halbordnung $\preceq$ auf einer Menge $I \subset \Delta$ heißt* **Totalordnung**, *wenn*

$$x, y \in I \implies x \preceq y \text{ oder } y \preceq x$$

Eine Menge $I \subset \Delta$ mit einer festen Totalordnung heißt **Kette**.

Definition 1.1.8 (Obere Schranke und Maximalität)**.** *Sei $(\Delta, \preceq)$ eine halbgeordnete Menge und $I \subseteq \Delta$ eine Teilmenge. Ein Element $u \in \Delta$ heißt* **obere Schranke** *für I, wenn für alle $i \in I$ gilt $i \preceq u$.*

Ein Element m einer halbgeordneten Menge $(\Delta, \preceq)$ heißt

maximal, *wenn* $\forall x \in \Delta : \ m \preceq x \implies m = x$.

minimal, *wenn* $\forall x \in \Delta : \ x \preceq m \implies m = x$.

Satz 1.1.9 (Zorn'sches Lemma)**.** *Sei $(\Delta, \preceq)$ eine halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, dass jede Kette $I \subseteq \Delta$ eine obere Schranke in Δ besitzt. Dann hat Δ ein maximales Element.*

Bemerkung 1.1.10. Es stellt sich heraus, dass das Zorn'sche Lemma nicht nur das Auswahlaxiom benötigt, sondern sogar zu ihm äquivalent ist. Statt des Auswahlaxioms in seiner Form 1.1.5 könnte man also auch das Zorn'sche Lemma axiomatisch voraussetzen. Es folgen fundamentale Sätze

Korollar 1.1.11 (Hamel)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum hat eine Basis.*

Korollar 1.1.12. *Jeder $\mathbb{K}-$Vektorraum ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von $\mathbb{K}$. Genauer, falls $\mathcal{B}$ Basis, dann*

$$V \overset{\cong}{\longleftarrow} \bigoplus_{b\in\mathcal{B}} \mathbb{K}, \qquad \sum_{b\in\mathcal{B}} \lambda_b \cdot b \longleftarrow\shortmid \lambda_b$$

Bemerkung 1.1.13. Äquivalent dazu ist übrigens: Jeder $\mathbb{K}-$Modul ist frei.

Korollar 1.1.14 (Existenz eines Komplements)**.** *Sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es einen Untervektorraum W mit $V = U \oplus W$.*

...und vieles mehr. Der gesamte restliche Inhalt dieses Manuskripts wird sich der Galoistheorie widmen, die diese Resultate nur noch implizit benötigen wird. Nichtsdestotrotz wird diese Reprise lohnenswert gewesen sein. Ein letzter Schluss, der aus dem Zorn'schen Lemma folgt, soll hier jedoch noch explizit erwähnt sein. Es ist nämlich dieser, auf welchem so ziemlich alles Nachfolgende aufbauen wird.

Lemma 1.1.15. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[t]$ irreduzibel. Dann ist der Quotient $\mathbb{K}[t]/(f)$ wieder ein Körper und kann insbesondere als Vektorraum über $\mathbb{K}$ verstanden werden. In diesem bilden für $d = \deg f$ die Polynomrestklassen*

$$[1], [t], \ldots, [t^{d-1}]$$

eine $\mathbb{K}$-Basis von $\mathbb{K}[t]/(f)$. Die Multiplikation mit dem Objekt $[t]$ wird durch die Begleitmatrix $\mathcal{M}_f \in \mathbb{K}^{d\times d}$ von f beschrieben.

2 Allgemeine Körpererweiterungen

2.1 Grundlegende Begriffe und Erweiterung der Skalare

Definition 2.1.1 (Körpererweiterung)**.** *Es seien* $\mathbb{L}$ *und* $\mathbb{K}$ *Körper, sodass* $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$*. Dann nennen wir* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Körpererweiterung.*

Bemerkung 2.1.2. Das Studium der Galoistheorie wird sich hauptsächlich auf Körpererweiterungen einfacher algebraischer Art fokussieren. Was das bedeutet führen wir formal in 2.2.1 und 3.2.12 ein. Für jetzt wollen wir bemerken, dass falls wir eine Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}[t]/(f)$, also $\mathbb{L}$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$, identifizieren können, dann verstehen wir die Struktur von $\mathbb{L}$ ziemlich gut. Einige Beispiele...

Beispiel 2.1.3.

(i) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ ist $t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ irreduzibel und

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i) \cong \mathbb{R}[t]/(t^2 + 1).$$

beide aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorräume. Konkret entsteht die Isomorphie durch Basistransformation $(1, i) \longmapsto ([1], [t])$. Bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $(1, i)$ hat die Multiplikation mit i die Matrix

$$M_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also wirkt jedes $a + bi \in \mathbb{C}$ durch

$$aI_2 + bM_i = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Das Minimalpolynom von M_i ist t^2+1, und dieses zerfällt über $L = \mathbb{C}$ als $(t-i)(t+i)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Also ist M_i über L diagonalisierbar. Damit sind auch die Multiplikationsmatrizen aller Elemente von L, also aller Polynome in M_i, über L diagonalisierbar.

(ii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist $t^2 - 2$ irreduzibel und

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \mathbb{Q}[t]/(t^2 - 2).$$

Wie in (i) haben die Multiplikationen mit $\sqrt{2}$ und $a + b\sqrt{2}$ bezüglich der Basis $(1, \sqrt{2})$ die Matrizen

$$M_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \& \qquad aI_2 + bM_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Auch hier zerfällt $t^2 - 2$ über $\mathbb{L}$ in $(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$ paarweise verschiedene Linearfaktoren. Also ist auch diese Erzeugermatrix über $\mathbb{L}$ diagonalisierbar, und daher ebenso die Multiplikationsmatrix jedes Elements von $\mathbb{L}$.

(iii) Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist $t^3 - 2$ irreduzibel und

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \cong \mathbb{Q}[t]/(t^3 - 2).$$

Mit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und der Basis $(1, \alpha, \alpha^2)$ hat die Multiplikation mit α die Begleitmatrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher wirkt jedes $a + b\alpha + c\alpha^2$ durch

$$aI_3 + bM_\alpha + cM_\alpha^2 = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Hier ist die Situation anders: das Minimalpolynom $t^3 - 2$ zerfällt über $\mathbb{L}$ nicht vollständig, weil die beiden anderen Nullstellen nicht in $\mathbb{L}$ liegen. Also ist die Erzeugermatrix M_α über $\mathbb{L}$ nicht diagonalisierbar. Insbesondere gibt es also bereits in $\mathbb{L}$ selbst Elemente, deren Multiplikationsmatrix über $\mathbb{L}$ nicht diagonalisierbar ist. Genau an diesem Punkt wird später der Unterschied zwischen den ersten zwei Beispielen und diesem Beispiel sichtbar.

Bemerkung 2.1.4. An diesen Beispielen lässt sich das Prinzip einfacher Körpererweiterungen erkennen. Tritt $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ als $\mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K}$ auf, so kommt diese Erweiterung verstanden als $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Multiplikationsabbildung. Diese ist über $\mathbb{K}$ sicher nicht diagonalisierbar, aber aufgefasst als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{L}$ können verschiedene Diagonalisierbarkeitsfälle eintreten. $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen zu $\mathbb{L}$-linearen Abbildungen zu erweitern, ist auch die Motivation für die folgende Konstruktion.

Lemma 2.1.5 (Erweiterung der Skalare für Vektorräume)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung. Betrachten wir $\mathbb{L}$ als einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist das Tensorprodukt*

$$V_\mathbb{L} := V \otimes_\mathbb{K} \mathbb{L}$$

ein $\mathbb{L}$-Vektorraum bezüglich der Multiplikation (von rechts):

$$(v \otimes \mu)\lambda := v \otimes \mu \cdot \lambda$$

und es gilt $\dim_\mathbb{L} V_\mathbb{L} = \dim_\mathbb{K} V$. Wenn $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, gilt:

$$f_\mathbb{L} := f \otimes \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(V_\mathbb{L}, W_\mathbb{L})$$

Die Konstruktion von $V_\mathbb{L}$ aus V (mit $\mathbb{L}$) nennt man eine **Erweiterung der Skalare** *von $\mathbb{K}$ zu $\mathbb{L}$*

Beispiel 2.1.6. Wir haben einen natürlichen Isomorphismus

$$M(m \times n, \mathbb{K}) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cong M(m \times n, \mathbb{L}) \qquad \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes \lambda_i \mapsto \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i,$$

insbesondere gilt $\mathbb{K}^n \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cong \mathbb{L}^n$. Das heißt, dass man den Übergang von A gesehen als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{K}$ zu A als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{L}$ genau als Erweiterung von Skalaren wahrnehmen kann.

2.2 Algebraische & Endliche Körpererweiterungen

Definition 2.2.1 (Grad, Algebraisch, Transzendent)**.** *Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung.*

(i) Die Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ heißt **endlich***, wenn $\mathbb{L}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum endlichdimensional ist. In diesem Fall heißt*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] := \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$$

der **Grad** *der Erweiterung.*

(ii) Ein Element $x \in \mathbb{L}$ heißt **algebraisch** *über $\mathbb{K}$, wenn es ein nichtkonstantes Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ gibt mit $f(x) = 0$.*

(iii) Ein Element $x \in \mathbb{L}$ heißt **transzendent** *über $\mathbb{K}$, wenn es nicht algebraisch über $\mathbb{K}$ ist.*

(iv) Die Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ heißt **algebraisch***, wenn jedes Element von $\mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$ ist.*

(v) Für $x \in \mathbb{L}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}(x)$ den kleinsten Teilkörper von $\mathbb{L}$, der $\mathbb{K}$ und x enthält.

Lemma 2.2.2 (Endlichkeit gibt Algebraizität)**.** *Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.*

Beweisidee. Dieses Resultat scheint auf den ersten Blick algebraisch schwierig zu sein, ist es aber bei näherer Betrachtung überhaupt nicht. Bemerke nur, dass $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] < \infty$ bedeutet, dass die Vektoren $1, x, \ldots, x^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]} \in L$ linear abhängig sein müssen, also $a_0, \ldots, a_{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]} \in \mathbb{K}$ nicht alle Null existieren, sodass $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]} x^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]} = 0$

□

Lemma 2.2.3 (Minimalpolynom)**.** *Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $x \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$. Dann gibt es genau ein normiertes irreduzibles Polynom*

$$\mu_x = \mu_x^{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}[t]$$

mit $\mu_x(x) = 0$. Es teilt jedes Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ mit $f(x) = 0$. Dieses Polynom heißt das **Minimalpolynom** *von x über $\mathbb{K}$.*

Beweisidee. Die Behauptung folgt ganz schnell aus der Tatsache, dass $\mathbb{K}[t]$ ein Hauptidealring ist und deshalb der Kern des Auswertungshomomorphismus $\mathrm{ev}_x : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}$ ein solches Hauptideal sein muss; erzeugt von einem minimalen Element μ_x. □

Lemma 2.2.4 (Gradformel)**.** *Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und $x \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{K}[t]/(\mu_x) \xrightarrow{\Phi} \mathbb{K}(x), \quad [f(t)] \mapsto f(x)$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Insbesondere gilt

$$[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}] = \deg(\mu_x).$$

Bemerkung 2.2.5. Surjektivität folgt daraus, dass $\mathbb{K}(x)$ als $\mathbb{K}$-Algebra gerade von x erzeugt wird. Der Kern ist gerade (μ_x), also induziert der Quotient einen Isomorphismus.

Satz 2.2.6 (Turmformel)**.** *Seien $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ Körper und seien $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}/\mathbb{E}$ endlich. Dann ist auch $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ endlich und es gilt*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{E}]\,[\mathbb{E} : \mathbb{K}].$$

Definition 2.2.7 (Zerfällungskörper)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $0 \neq f \in \mathbb{K}[t]$. Ein Körper $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$ heißt* **Zerfällungskörper** *von f über $\mathbb{K}$, wenn*

(i) das Polynom f in $\mathbb{L}[t]$ in Linearfaktoren zerfällt und

(ii) $\mathbb{L}$ von den Nullstellen von f über $\mathbb{K}$ erzeugt wird.

Satz 2.2.8 (Existenz und Endlichkeit des Zerfällungskörpers)**.** *Zu jedem nichtkonstanten Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ existiert ein Zerfällungskörper $\mathbb{L} \supseteq \mathbb{K}$. Diese Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ ist endlich.*

Satz 2.2.9 (Eindeutigkeit bis auf Isomorphie)**.** *Sei $f \in \mathbb{K}[t]$. Sind $\mathbb{L}$ und $\mathbb{L}'$ Zerfällungskörper von f über $\mathbb{K}$, so gibt es einen $\mathbb{K}$-Isomorphismus*

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{L} \to \mathbb{L}'.$$

Definition 2.2.10 (Algebraischer Abschluss)**.** *Ein* **algebraischer Abschluss** *eines Körpers $\mathbb{K}$ ist eine algebraische Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{L}$ algebraisch abgeschlossen ist; Jedes nichtkonstante Polynom in $\mathbb{K}[t]$ zerfällt bereits vollständig in Linearfaktoren über $\mathbb{L}$*

Satz 2.2.11. *Jeder Körper besitzt einen algebraischen Abschluss. Zwei algebraische Abschlüsse sind über den Grundkörper isomorph.*

Bemerkung 2.2.12. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbb{K}}$ den algebraischen Abschluss von $\mathbb{K}$. Ist $\mathbb{L}$ algebraisch abgeschlossen und $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, dann gibt es eine natürliche Einbettung $\overline{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathbb{L}$. Beispiel: $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$

3 Galoiserweiterungen

3.1 Multiplikationsendomorphismen

Es sei stets $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine endliche Körpererweiterung. Betrachte $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ als $\mathbb{L}$-Algebra mit skalarer Multiplikation über dem zweiten Faktor.

$$a \cdot (x \otimes_{\mathbb{K}} y) = x \otimes_{\mathbb{K}} ay$$

Lemma 3.1.1 (Erweiterung der Skalare für Körper)**.** *Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung, x algebraisch über $\mathbb{K}$, und $\mu_x \in \mathbb{K}[t]$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung*

$$\mathbb{L}[t] \to \mathbb{K}(x) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}, \quad f(t) \mapsto f(x \otimes 1)$$

surjektiv, und ihr Kern ist das von μ_x erzeugte Ideal. Insbesondere gibt es einen natürlichen Isomorphismus von $\mathbb{L}$-Algebren

$$\mathbb{K}(x) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cong \mathbb{L}[t]/(\mu_x).$$

Bemerkung 3.1.2. Dieses Lemma ist unsere formale Rechtfertigung dafür, die Multiplikationsabbildungen in 2.1.3 mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ nun als lineare Operatoren mit Koeffizienten in $\mathbb{L}$ aufzufassen. Es beweist, dass durch Hinzunahme von mehr »Darstellungsmöglichkeiten<"keine Struktur verloren geht. Möglicherweise stehen dann für die Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{L}$ »genug« Zahlen zur Verfügung. Wir können das sogar noch konkretisieren:

Lemma 3.1.3 (Begleitmatrix der Multiplikation)**.** *Sei $x \in \mathbb{L}$, und setze $\mathbb{E} := \mathbb{K}(x)$, $d := [\mathbb{E} : \mathbb{K}]$. Sei μ_x das Minimalpolynom von x über $\mathbb{K}$, und sei C_{μ_x} die Begleitmatrix*

$$\mu_x(t) = t^d + c_{d-1}t^{d-1} + \cdots + c_0 \qquad C_{\mu_x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix}$$

Dann hat der Endomorphismus

$$m_x : \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}, \quad z \mapsto (x \otimes 1)z$$

bezüglich der $\mathbb{L}$-Basis $(1 \otimes 1,\ x \otimes 1,\ \ldots,\ x^{d-1} \otimes 1)$ die Matrix C_{μ_x}.

Nun können wir daran ganz praktisch Diagonalisierbarkeitsfälle charakterisieren

Korollar 3.1.4. *Sei $x \in \mathbb{L}$. Dann sind jeweils äquivalent:*

μ_x zerfällt in $\mathbb{L}[t]$ in Linearfaktoren	$\iff$	*χ_{m_x} zerfällt in $\mathbb{L}[t]$ in Linearfaktoren*
μ_x hat keine mehrfachen irreduziblen Faktoren	$\iff$	*μ_x hat in seinem Zerfällungskörper keine mehrfache Nullstelle*
m_x ist über $\mathbb{L}$ diagonalisierbar	$\iff$	*μ_x zerfällt in $\mathbb{L}[t]$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren*

Definition 3.1.5 (Normal, Separabel, Galois)**.** *Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ eine Körpererweiterung.*

(i) Das Element $x \in \mathbb{L}$ heißt **normal** *über $\mathbb{K}$, wenn μ_x über $\mathbb{L}$ in Linearfaktoren zerfällt.*

(ii) Das Element $x \in \mathbb{L}$ heißt **separabel** *über $\mathbb{K}$, wenn μ_x keine mehrfachen irreduziblen Faktoren hat.*

(iii) Das Element $x \in \mathbb{L}$ heißt **Galois** *über $\mathbb{K}$, wenn m_x über $\mathbb{L}$ diagonalisierbar ist.*

Entsprechend heißt die Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ normal / separabel / Galois, wenn alle $x \in \mathbb{L}$ normal / separabel / Galois über $\mathbb{K}$ sind.

Beispiel 3.1.6 (zu 2.1.3)**.**

(i) ist Galois, da μ_x in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Also auch das Minimalpolynom von $a + bi$.

(ii) ist Galois aus demselben Grund.

(iii) ist separabel aber nicht normal.

(iv) Wir wollen uns auch ein Beispiel für eine normale, nicht separable Körpererweiterung überlegen. Nimm

$$\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(t) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbb{F}_p[t], g \neq 0 \right\}$$

den rationalen Funktionenkörper über $\mathbb{F}_p$. Betrachte nun das Polynom $f(x) = x^p - t \in \mathbb{K}[x]$, dies ist irreduzibel über $\mathbb{K}$. (t ist keine p-te Potenz in $\mathbb{F}_p(t)$.) Sei $\alpha \in \ker f$ und $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$. Dann ist $\mu_\alpha = x^p - t$ das Minimalpolynom von α, doch über $\mathbb{L}[x]$ gilt

$$x^p - t = (x - \alpha)^p$$

Also zerfällt $f \in \mathbb{L}[x]$ in Linearfaktoren mit p-facher Nullstelle.

3.2 Separabilität

Bemerkung 3.2.1. In 3.1.6 fällt bereits auf, dass (Nicht-)Separabilität eine weitaus »mysteriösere« Eigenschaft als Normalität ist. Wir wollen daher separable Polynome spezifischer charakterisieren.

Definition 3.2.2 (Formale Ableitung)**.** *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und*

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t].$$

Dann heißt

$$f'(t) := a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$$

die **formale Ableitung** *von* f*.*

Lemma 3.2.3. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* $f \in \mathbb{K}[t]$*,* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Körpererweiterung und* $\alpha \in \mathbb{L}$*. Dann sind äquivalent:*

(i) α *ist eine mehrfache Nullstelle von* f*, d.h.* $(t-\alpha)^2$ *teilt* f *in* $\mathbb{L}[t]$*.*

(ii) Es gilt $f(\alpha) = 0$ *und* $f'(\alpha) = 0$*.*

Lemma 3.2.4. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$*; sei* x *algebraisch über* $\mathbb{K}$*. Dann hat* μ_x *in seinem Zerfällungskörper keine mehrfache Nullstelle.*

Korollar 3.2.5 (Endlichkeit in char 0 gibt Separabilität)**.** *Jede endliche Körpererweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *mit* $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 0$ *ist separabel.*

Definition 3.2.6 (Separabilität, Allgemein)**.** *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $0 \neq f \in \mathbb{K}[t]$*. Das Polynom* f *heißt* **separabel***, wenn es in seinem Zerfällungskörper keine mehrfache Nullstelle besitzt.*

Lemma 3.2.7 (Ableitungskriterium)**.** *Sei* $\mathbb{F}$ *ein Körper und* $0 \neq f \in \mathbb{F}[t]$*. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist separabel.*

(ii) $\gcd(f, f') = 1$*.*

(iii) Für jede Körpererweiterung $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ *tritt in der Faktorisierung von* f *in* $\mathbb{E}[t]$ *in irreduzible Polynome kein Faktor mehrfach auf.*

Korollar 3.2.8. *Sei $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ eine Körpererweiterung und sei $f \in \mathbb{F}[t]$ separabel. Dann ist f, als Element von $\mathbb{E}[t]$ aufgefasst, ebenfalls separabel.*

Lemma 3.2.9. *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $f \in \mathbb{F}[t]$ irreduzibel. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist nicht separabel.*

(ii) *$f'(t) = 0$.*

(iii) *Es gibt ein irreduzibles Polynom $g \in \mathbb{F}[t]$ mit*

$$f(t) = g(t^p).$$

Definition 3.2.10 (Perfekter Körper)**.** *Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt* **perfekt***, wenn jedes irreduzible Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ separabel ist. (Oder äquivalent: Jede algebraische Erweiterung von $\mathbb{K}$ ist separabel.)*

Satz 3.2.11 (über Perfekte Körper)**.** *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ist $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ oder $|\mathbb{K}| < \infty$, dann ist $\mathbb{K}$ perfekt.*

Beweisidee. Für $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ wähle man $f \in \mathbb{K}[t]$ irreduzibel. Dann ist $\mathbb{K}[t]/(f)$ eine endliche Körpererweiterung. Nach 3.2.5 ist diese separabel. Also ist f separabel über $\mathbb{K}$. Für $|\mathbb{K}| < \infty$ gilt gleich $\operatorname{char}\mathbb{K} = p$ und es gibt den Frobenius-Automorphismus $\Phi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p, x \mapsto x^p$. Dieser führt die Annahme $f \in \mathbb{F}_p[t]$ irreduzibel und nicht separabel zum Widerspruch, da kein irreduzibles $g \in \mathbb{F}_p[t]$ mit $f(t) = g(t^p)$ existieren kann (siehe 3.2.9). □

Definition 3.2.12 (Einfache Erweiterung)**.** *Eine Körpererweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *heißt einfach, falls* $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ *für ein* $\alpha \in \mathbb{L}$*.*

Satz 3.2.13 (vom Primitiven Element)**.** *Jede endliche separable Körpererweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *ist einfach.*

Mit einiger Arbeit mehr in der Ringtheorie, kann man außerdem zeigen:

Korollar 3.2.14 (Transitivität der Separabilität)**.** *Seien* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ *endliche Körpererweiterungen. Sind* $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ *und* $\mathbb{L}/\mathbb{E}$ *separabel, so ist auch* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *separabel.*

3.3 Körperautomorphismen

Bemerkung 3.3.1. Unter den Ringhomomorphismen gibt es eben auch die noch spezielleren $\mathbb{K}$-Algebren-Homomorphismen, die zusätzlich mit skalarer Multiplikation verträglich sind. Wir untersuchen den Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}, \mathbb{F})$ dieser Homomorphismen zwischen zwei $\mathbb{K}$-Algebren und stellen Erstaunliches fest

Lemma 3.3.2 (Artin)**.** *Seien* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Körpererweiterung,* $\mathbb{F}$ *ein Körper und*

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_r : \mathbb{L} \to F$$

paarweise verschiedene $\mathbb{K}$*-Algebrenhomomorphismen. Dann sind* $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ $\mathbb{F}$*-linear unabhängig (als Abbildungen* $\mathbb{L} \to \mathbb{F}$*). Also für* $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{F}$

$$a_1\sigma_1 + \cdots + a_r\sigma_r = 0 \iff a_1, \ldots, a_r = 0$$

Definition 3.3.3 (Automorphismengruppe)**.** *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Körpererweiterung. Die Automorphismengruppe von* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *ist definiert als*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{L}) \mid \sigma|_{\mathbb{K}} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}\}$$

(hierbei ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$ *die Automorphismengruppe von* $\mathbb{L}$ *als Ring, also die Gruppe aller Ringisomorphismen* $\mathbb{L} \to \mathbb{L}$*).*

Korollar 3.3.4. *Für jede endliche Körpererweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *gilt*

$$|\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})| \leq [\mathbb{L} : \mathbb{K}].$$

Definition 3.3.5 (Galoisgruppe)**.** *Ist* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Galois-Erweiterung, so heißt*

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) := \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

die **Galoisgruppe** *von* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$*.*

Satz 3.3.6 (Galois-Charakterisierung durch Aut(L/K))**.** *Für eine endliche Erweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *sind äquivalent:*

(i) $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *ist eine Galois-Erweiterung.*

(ii) Es gilt $|\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{K})| = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

(iii) Es gibt einen $\mathbb{L}$*-Algebrenisomorphismus* $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \cong \mathbb{L}^{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}$.

Lemma 3.3.7. *Sei* V *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum, und seien* $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{End}(V)$ *paarweise kommutierende diagonalisierbare Endomorphismen. Dann gibt es eine Basis von* V*, bezüglich der alle* f_i *diagonal sind.*

Satz 3.3.8 (Galois-Charakterisierung durch Zerfällungskörper)**.** *Für eine endliche Erweiterung* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *sind äquivalent:*

(i) $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *ist eine Galois-Erweiterung.*

(ii) Es gibt ein separables Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$*, dessen Zerfällungskörper über* $\mathbb{K}$ *gleich* $\mathbb{L}$ *ist.*

(iii) Es gibt ein irreduzibles separables Polynom $p \in \mathbb{K}[t]$*, dessen Zerfällungskörper über* $\mathbb{K}$ *gleich* $\mathbb{L}$ *ist.*

Korollar 3.3.9 (Transitivität auf Nullstellen)**.** *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine endliche Galois-Erweiterung. Wählt man ein primitives Element* $\alpha \in \mathbb{L}$*, so ist* $\mathbb{L}$ *der Zerfällungskörper des separablen irreduziblen Polynoms* μ_α*, und* $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ *wirkt transitiv auf der Menge seiner Nullstellen in* $\mathbb{L}$*.*

Korollar 3.3.10. *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine endliche separable Erweiterung. Dann gibt es eine endliche Galois-Erweiterung* $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ *mit* $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{M}$*.*

3.4 Galoiskorrespondenz

Definition 3.4.1 (Fixkörper)**.** *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe*

$$G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}).$$

(i) Ist $H \leqslant G$ *eine Untergruppe, so heißt*

$$\mathbb{L}^H := \{x \in \mathbb{L} \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in H\}$$

der **Fixkörper** *von* H*.*

(ii) Ist umgekehrt $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ *ein Zwischenkörper, so setzen wir*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) := \{\sigma \in G \mid \sigma|_{\mathbb{E}} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}\}$$

Satz 3.4.2 (Hauptsatz der Galoistheorie)**.** *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine endliche Galois-Erweiterung und*

$$G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}).$$

Dann ist die folgende Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longmapsto & \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) \\ \left\{\mathbb{E} \;\middle|\; \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}\right\} & \begin{array}{c}\longrightarrow \\ \longleftarrow\end{array} & \left\{H \;\middle|\; H \leqslant G\right\} \\ \mathbb{L}^H & \longmapsto & H \end{array}$$

eine inklusionsumkehrende **Bijektion** *von Zwischenkörpern* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ *und Untergruppen* $H \leqslant G$ *Außerdem gilt:*

(i) Für jeden Zwischenkörper $\mathbb{E}$ *gilt*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{E}] = |\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E})| \qquad \text{und} \qquad [\mathbb{E} : \mathbb{K}] = [G : \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E})].$$

(ii) Für jede Untergruppe $H \leqslant G$ *gilt*

$$[\mathbb{L} : \mathbb{L}^H] = |H| \qquad \text{und} \qquad [\mathbb{L}^H : \mathbb{K}] = [G : H].$$

(iii) Für einen Zwischenkörper $\mathbb{E}$ *sind äquivalent:*

(a) $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ *ist eine Galois-Erweiterung.*
(b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) \triangleleft G$*.*

In diesem Fall induziert die Einschränkung einen Isomorphismus

$$G/\mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{K}).$$

4 Abelsche & Radikalerweiterungen

Zunächst wollen wir uns an einige Definitionen und Resultate über abelsche und auflösbare Gruppen aus Algebra I erinnern.

4.1 Abelianisierung und Auflösbarkeit

Definition 4.1.1 (Abelianisierung)**.** *Ist G eine Gruppe, so bezeichnen wir mit $[G,G]$ die von allen Kommutatoren*

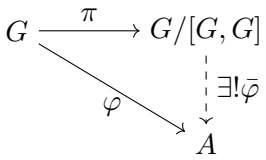
$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \quad (g,h \in G)$$

erzeugte Untergruppe. Dann ist $[G,G] \trianglelefteq G$, und der Quotient

$$G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$$

ist abelsch. Er heißt die **Abelianisierung** *von G.*

Lemma 4.1.2 (Universelle Eigenschaft der Abelianisierung)**.** *Sei G eine Gruppe. Dann ist $G/[G,G]$ abelsch. Ist A eine abelsche Gruppe und $\varphi : G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus, so gibt es genau einen Homomorphismus $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to A$, der das Dreieck kommutieren lässt*



Definition 4.1.3 (Auflösbare Gruppe)**.** *Eine endliche Gruppe G heißt* **auflösbar***, wenn es eine Kette von Untergruppen*

$$\{1\} = G_r \trianglelefteq G_{r-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

gibt, so dass alle Quotienten

$$G_i/G_{i+1}$$

abelsch sind.

Lemma 4.1.4 (Eigenschaften auflösbarer Gruppen)**.** *Es gelten die folgenden Aussagen.*

(i) Jede abelsche Gruppe ist auflösbar.

(ii) Jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

(iii) Jeder Quotient einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

(iv) Ist $N \trianglelefteq G$, und sind N und G/N auflösbar, so ist G auflösbar.

4.2 Abelsche Erweiterungen

Definition 4.2.1 (Abelsche Erweiterung)**.** *Eine endliche Galois-Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ heißt* **abelsch***, wenn ihre Galoisgruppe*

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

eine abelsche Gruppe ist.

Lemma 4.2.2 (Klassifikation abelscher Zwischenerweiterungen)**.** *Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine endliche Galois-Erweiterung und $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Dann liefert die Galois-Korrespondenz eine Bijektion zwischen den abelschen Galois-Zwischenerweiterungen $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E} \subseteq \mathbb{L}$ und den Untergruppen $H \leq G$ mit*

$$[G, G] \subseteq H.$$

Insbesondere ist $\mathbb{L}^{[G,G]}/\mathbb{K}$ die größte abelsche Zwischenerweiterung von $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, mit

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}^{[G,G]}/\mathbb{K}) \cong G^{\mathrm{ab}}.$$

Bemerkung 4.2.3. Für $H = \mathrm{Aut}(\mathbb{L}/\mathbb{E})$ gilt (Standard-Galois-Korrespondenz): $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ ist galoissch $\iff$ $H \trianglelefteq G$, und dann $\mathrm{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{K}) \cong G/H$. Also ist $\mathbb{E}/\mathbb{K}$ zusätzlich abelsch $\iff$ G/H abelsch $\iff$ $[G, G] \subseteq H$ (universelle Eigenschaft der Abelianisierung, siehe 4.1.2).

Beispiel 4.2.4 (Abelsche Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$)**.** Sei

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Dann ist $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ der Zerfällungskörper von

$$(t^2 - 2)(t^2 - 3).$$

Da dieses Polynom über $\mathbb{Q}$ separabel ist, ist $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung. Jeder $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{L}$ ist durch die Bilder von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ bestimmt, und diese müssen jeweils auf ihr Negatives oder auf sich selbst abgebildet werden. Daher gilt

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2.$$

Die Erweiterung ist also abelsch. Die drei Untergruppen der Ordnung 2 entsprechen den drei quadratischen Zwischenkörpern

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{6}).$$

Satz 4.2.5 (Kronecker–Weber). *Jede endliche abelsche Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ ist in einem Kreisteilungskörper enthalten. Das heißt: Ist $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ endlich, galoissch und abelsch, so gibt es ein $m \geq 1$ mit*

$$\mathbb{L} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

Definition 4.2.6 (Radikalerweiterung; durch Radikale auflösbar). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0. Eine Erweiterung $\mathbb{M}/\mathbb{K}$ heißt eine* **Radikalerweiterung**, *wenn es einen Turm*

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_r = \mathbb{M}$$

gibt, so dass für jedes i ein Element $\alpha_i \in \mathbb{K}_i$ und eine natürliche Zahl $n_i \geq 2$ existieren mit

$$\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1}(\alpha_i) \quad \textit{und} \quad \alpha_i^{n_i} \in \mathbb{K}_{i-1}.$$

Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[t]$ heißt **durch Radikale auflösbar**, *wenn alle seine Nullstellen in einer Radikalerweiterung von $\mathbb{K}$ liegen.*

Lemma 4.2.7 (Einheitswurzelerweiterungen). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0, und sei ζ_m eine primitive m-te Einheitswurzel. Dann ist $\mathbb{K}(\zeta_m)/\mathbb{K}$ eine endliche Galois-Erweiterung mit abelscher Galoisgruppe. Insbesondere ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}(\zeta_m)/\mathbb{K})$ auflösbar. Außerdem ist $\mathbb{K}(\zeta_m)/\mathbb{K}$ eine Radikalerweiterung.*

Lemma 4.2.8 (Radikalschritt bei vorhandenen Einheitswurzeln). *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik 0, sei $n \geq 2$, und sei $\zeta_n \in \mathbb{F}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Sei*

$$\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$$

mit

$$\alpha^n \in \mathbb{F}.$$

Dann ist $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ eine endliche abelsche Galois-Erweiterung.

Lemma 4.2.9 (Zyklische Erweiterungen von Primgrad sind radikal). *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper der Charakteristik 0, der eine primitive p-te Einheitswurzel ζ_p enthält. Sei $\mathbb{E}/\mathbb{F}$ eine zyklische Galois-Erweiterung vom Primgrad p. Dann gibt es ein $\beta \in \mathbb{E}$ mit*

$$\mathbb{E} = \mathbb{F}(\beta) \quad \textit{und} \quad \beta^p \in \mathbb{F}.$$

Satz 4.2.10 (Galois-Kriterium für Radikale). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0, sei $f \in \mathbb{K}[t]$, und sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ der Zerfällungskörper von f. Dann ist f genau dann durch Radikale auflösbar, wenn die Galoisgruppe*

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

auflösbar ist.

Korollar 4.2.11 (Cardano, Ferrari)**.** *Jede polynomielle Gleichung dritten und vierten Grades über einem Körper der Charakteristik* 0 *ist durch Radikale auflösbar. Es existieren also explizite Lösungsformeln für polynomielle Gleichungen dritten und vierten Grades.* ($\mathrm{Sym}(3), \mathrm{Sym}(4)$ *sind auflösbar*)

Korollar 4.2.12. *Es existieren Polynome von Grad* ≥ 5*, die nicht durch Radikale auflösbar sind.* ($\mathrm{Alt}(n)$ *ist einfach für* $n \geq 5$)

4.3 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Definition 4.3.1 (Konstruierbare Zahl)**.** *Sei* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ *ein Teilkörper. Eine reelle Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *heißt* **konstruierbar über** $\mathbb{K}$*, wenn sie aus den Elementen von* $\mathbb{K}$ *durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal gewonnen werden kann.*

Satz 4.3.2 (Algebraisches Kriterium für Konstruierbarkeit)**.** *Sei* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ *ein Teilkörper und* $x \in \mathbb{R}$*. Dann ist* x *genau dann über* $\mathbb{K}$ *konstruierbar, wenn es einen Turm von Körpererweiterungen*

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_r \subseteq \mathbb{R}$$

gibt, so dass

$$x \in \mathbb{K}_r$$

und für jedes i

$$[\mathbb{K}_i : \mathbb{K}_{i-1}] \leq 2$$

gilt.

Korollar 4.3.3. *Sei* $x \in \mathbb{R}$ *algebraisch über* $\mathbb{K}$*. Ist* x *über* $\mathbb{K}$ *konstruierbar, so ist*

$$[\mathbb{K}(x) : \mathbb{K}]$$

eine Zweierpotenz.

Lemma 4.3.4. *Sei* $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ *eine endliche Galois-Erweiterung mit* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$*. Dann sind äquivalent:*

(i) Alle Elemente von $\mathbb{L}$ *sind über* $\mathbb{K}$ *konstruierbar.*

(ii) Die Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ *ist eine* 2*-Gruppe.*

Satz 4.3.5 (Fermat-Kriterium)**.** *Ein reguläres n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn*

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdots p_r,$$

wobei $m \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, \ldots, 5\}$ und $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Fermat-Primzahlen sind (bekannt sind lediglich 5, nämlich $\{3, 5, 17, 257, 65537\}$).

5 Intermezzo

5.1 Praktikable Sätze

Satz 5.1.1 (Eisensteinkriterium für Irreduzibilität)**.** *Sei* $f = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$ *mit* $n \geq 1$*, und sei* p *eine Primzahl mit*

$$p \nmid a_n, \qquad p \mid a_i \text{ für } i = 0, \ldots, n-1, \qquad p^2 \nmid a_0.$$

Dann ist f *irreduzibel über* $\mathbb{Q}$*.*

Lemma 5.1.2 (Irreduzibilitätskriterium für Grad 3)**.** *Sei* $f \in \mathbb{Z}[t]$ *normiert mit* $\deg f = 3$*. Dann gilt*

$$f \text{ reduzibel über } \mathbb{Q} \iff \exists\, t_0 \in \mathbb{Z} \text{ mit } f(t_0) = 0 \text{ und } t_0 \mid a_0,$$

wobei a_0 *den konstanten Term von* f *bezeichnet.*

Bemerkung 5.1.3. Für $\deg f = 2$ gilt die Äquivalenz analog (und deutlich einfacher via p-q-Formel/Diskriminante). Für $\deg f \geq 4$ ist die Aussage **falsch** — z.B. ist $t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2+1)^2$ reduzibel über $\mathbb{Q}$, besitzt aber keine rationale Nullstelle.

Definition 5.1.4 (Diskriminante)**.** *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $f \in \mathbb{K}[t]$ *von Grad* n*. Seien* $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ *die Nullstellen von* f*. Dann ist*

$$\mathrm{Disc}(f) = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

die **Diskriminante** *von* f

Lemma 5.1.5 (Diskriminante für Separabilität)**.** *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $f \in \mathbb{K}[t]$*. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

$$f \text{ ist separabel} \iff \mathrm{Disc}(f) \neq 0$$

Beispiel 5.1.6.

(i) $f(t) = t^2 + bt + c \Longrightarrow \mathrm{Disc}(f) = b^2 - 4c$

(ii) $f(t) = t^3 + pt + q \Longrightarrow \mathrm{Disc}(f) = -4p^3 - 27q^2$

Beispiel 5.1.7 (Galoisgruppen und Körpererweiterungen)**.**

Grp	**Körper-erweiterung**	**Begründung**
C_2	$\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}$	$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_3)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \cong C_2$ (Lemma)
C_3	$\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1})/\mathbb{Q}$	Betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_7)$. Dann ist $[\mathbb{Q}(\zeta_7):\mathbb{Q}] = \lvert C_6\rvert = 6 = 2\cdot 3$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1}):\mathbb{Q}] = 3$, da $\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1})/\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[t]/(t^3+t^2-2t-1)$. Also nach der Turmformel $\lvert\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1})/\mathbb{Q})\rvert = 3$ prim. $\Rightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7+\zeta_7^{-1})/\mathbb{Q}) \cong C_3$
C_4	$\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$	$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \cong C_4$ (Lemma)
C_5	$\mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1})/\mathbb{Q}$	Betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{11})$. Dann ist $[\mathbb{Q}(\zeta_{11}):\mathbb{Q}] = \lvert C_{10}\rvert = 10 = 2\cdot 5$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1}):\mathbb{Q}] = 5$, da $\mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1})/\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[t]/(t^5+t^4-4t^3-3t^2+3t+1)$. Also nach der Turmformel $\lvert\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1})/\mathbb{Q})\rvert = 5$ prim. $\Rightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{11}+\zeta_{11}^{-1})/\mathbb{Q}) \cong C_5$
C_6	$\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}$	$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_7)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong C_6$ (Lemma)
C_7	$\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ wobei $\mathbb{Q} \subset U \subset \mathbb{Q}(\zeta_{29})$ und $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_{29})^N$ $\lvert N\rvert = 4$	$G := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{29})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})^\times \cong C_{28}$ (Lemma) zyklisch, abelsch. $\Rightarrow \forall N \leq G : N \triangleleft G \Rightarrow \lvert G\rvert = 4\cdot 7 \Rightarrow \exists H \triangleleft G, H \cong C_7$ (7-Sylow) $\Rightarrow \exists \mathbb{L} \subset \mathbb{Q}(\zeta_{29})$ mit $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) = H \cong C_7$ und daher $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_{29})^N, N \cong G/H, \lvert N\rvert = 4$ (Verallgemeinerung der Fälle C_3, C_5)
C_8	$\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ wobei $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\zeta_{17})^{C_2} = \mathbb{Q}(\zeta_{17}-\zeta_{17}^{-1})$	$G := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{17})/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times \cong C_{16}$ (Lemma) zyklisch, abelsch. $\lvert G\rvert = 16 = 2\cdot 8$ $\tau : z \to \bar{z} \in G$ entspricht $a = -1 \in (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$, hat Ordnung 2, und erzeugt die eindeutige normale Untergruppe N der Ordnung 2 in C_{16}. Setze $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\zeta_{17})^{C_2}$. Nach der Turmformel $[\mathbb{L}:\mathbb{Q}] = \frac{16}{2} = 8$. $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) \cong C_8$, da C_{16} eine eindeutige Untergruppe der Ordnung 8 besitzt

Grp	**Körper-erweiterung**	**Begründung**
$C_2 \times C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$	$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$, da $t^2 - 2, t^2 - 3$ irreduzibel (Eisenstein) und $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Galois, da Zerfällungskörper von $(t^2 - 2)(t^2 - 3)$. $\sigma : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto \sqrt{3}$ und $\tau : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2}, \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ haben Ordnung 2, kein Element hat Ordnung 4 (jedes permutiert nur die 2 Nullstellen eines quadratischen Polynoms), also $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$, nicht C_4.
$C_4 \times C_2$	$\mathbb{Q}(\zeta_5, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$	
$\bigtimes_1^3 C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$	simultan zu $C_2 \times C_2$, betrachte $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$. Alle Minimalpolynome der noch nicht enthaltenen Nullstellen bleiben über den Zwischenerweiterungen irreduzibel. Daher permutieren die σ's in der Galoisgruppe lediglich zwei korrespondierende Nst. Also $C_2 \times C_2 \times C_2$
Sym(3)	$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)/\mathbb{Q}$	Nimm $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) =: \mathbb{L}$ ist Zerfällungskörper von $t^3 - 2 = (t - \sqrt[3]{2})(t - \zeta_3 \sqrt[3]{2})(t - \zeta_3^2 \sqrt[3]{2})$. Nach der Turmformel ergibt sich: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg t^3 - 2 \cdot \deg t^2 + t + 1 = 6$. Betrachte $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(3)$. Da aber $\lvert G\rvert = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 6 = \lvert\mathrm{Sym}(3)\rvert$ ist bereits $G = \mathrm{Sym}(3)$.
D_4	$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$	Nimm $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) =: \mathbb{L}$ ist Zerfällungskörper von $t^4 - 2 = (t - \sqrt[4]{2})(t + \sqrt[4]{2})(t - i\sqrt[4]{2})(t + i\sqrt[4]{2})$. Nach der Turmformel ergibt sich: $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = \deg(t^2 + 1) \cdot \deg(t^4 - 2) = 8$. Betrachte $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{Q}) \hookrightarrow \mathrm{Sym}(4)$. Da aber $\lvert G\rvert = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 8 \neq 24 = \lvert\mathrm{Sym}(4)\rvert$, ist G eine echte Untergruppe. $\sigma : \sqrt[4]{2} \mapsto i\sqrt[4]{2},\ i \mapsto i$ hat Ordnung 4, $\tau : \sqrt[4]{2} \mapsto \sqrt[4]{2},\ i \mapsto -i$ hat Ordnung 2, und $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$, also $G = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_4$.

Beweistaktiken

5.1.8 Normalität

Teilbarkeitsargument: Falls $\mathbb{K} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{L}$ Körpererweiterung, dann gilt $\mu_{\alpha,\mathbb{F}} | \mu_{\alpha,\mathbb{K}}$, denn $\mu_{\alpha,\mathbb{K}} \in \mathbb{F}[t]$ ist weiterhin im Kern von $\mathrm{ev}_\alpha : \mathbb{F}[t] \to \mathbb{F}$.

5.1.9 Separabilität

Nimm das Kernresultät 3.2.11 ($\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ oder $|\mathbb{K}| < \infty$) oder auch die Charakterisierung 3.2.7 mittels ggT

5.1.10 Irreduzibilität

Eisenstein ggf. mit Substitution 5.1.1 oder $\deg f = 2, 3$ ist reduzibel falls Nullstelle im Körper selbst.
Für $t^n - a$ reduzibel muss $\sqrt[n]{a^m} \in \mathbb{K}$ für ein $m \in \{1, \ldots, n-1\}$

5.1.11 Endlichkeit

Nutze die Turmformel 2.2.6 und reduziere die Aussge auf ein Teilbarkeitsproblem. Insbesondere haben wir da immer Algebraizität 2.2.2

5.1.12 Algebraizität

Nimm ein algebraisches $\alpha \in \mathbb{L}$, die Erweiterung $\mathbb{K}(\alpha)/\mathbb{K}$ bzw. sogar $\mathrm{Zerf}(\mu_\alpha)/\mathbb{K}$ ist endlich für jedes solches α. Geht auch für allgemeine f mit $\deg f < \infty$.

5.1.13 Bestimmung von Galoisgruppen

Nimm ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Ist σ bereits durch das Bild eines einzelnen Elements bestimmt? (σ ist ein Automorphismus.)

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. A. Thom, Prof. V. Alekseev; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. A. Thom, Prof. V. Alekseev; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.