mosch [1,2] mail@math.moschpit.de

AL10: Algebra I

Wintersemester 2025/2026
Leitung: Prof. A. Thom, Dr. V. Alekseev

Inhaltsverzeichnis

1 Multilineare Algebra **3**

1.1 Tensorprodukte . . . 3
Definition 1.1.1 (Tensorprodukt) . . . 3
Definition 1.1.3 (Freier Vektorraum) . . . 3
Lemma 1.1.6 (Lineare Unabhängigkeit im Tensorprodukt) . . . 4
Beispiele 1.1.9 (weitere natürliche Isomorphien) . . . 4

1.2 Äußere Algebra . . . 5
Definition 1.2.1 (Tensoralgebra) . . . 5
Definition 1.2.3 (Äußere Algebra) . . . 5

1.3 Alternierende Formen und Determinante . . . 6
Definition 1.3.6 (Determinante) . . . 7

2 Gruppentheorie **8**

2.1 Grundlagen . . . 8
Definition 2.1.8 (Erzeugte Untergruppen) . . . 9

2.2 Gruppenwirkungen - Allgemein . . . 9
Definition 2.2.1 (Gruppenwirkung) . . . 9
Definition 2.2.2 (Bahn / Orbit) . . . 9
Lemma 2.2.4 (Orbitzerlegung) . . . 10
Definition 2.2.5 (Transitivität) . . . 10
Definition 2.2.8 (Stabilisator) . . . 10

2.3 Gruppenwirkungen auf Gruppen . . . 10
Korollar 2.3.6 (Klassifikation von Wirkungen) . . . 11
Lemma 2.3.9 (Bahnformeln / Orbit-Theoreme) . . . 12
Satz 2.3.10 (von Lagrange) . . . 12

2.4 Normalteilertheorie . . . 13

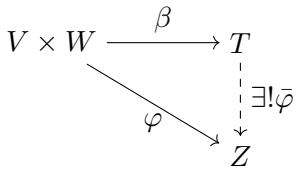
zul. geändert am 7. November 2026

Definition 2.4.1 (Normalteiler) . . . 13
Satz 2.4.2 (Homomorphiesatz für Gruppen) . . . 13
2.5 Geometrie und Gruppen . . . 14
Satz 2.5.1 (von Euler) . . . 14
Satz 2.5.3 (Klassifikation endlicher Rotationsgruppen) . . . 14
2.6 Strukturtheorie . . . 14
Definition 2.6.1 (Kurze exakte Folge / Sequenz) . . . 14
Lemma 2.6.7 (Erzeuger von Alt(n)) . . . 15
Definition 2.6.8 (Automorphismus) . . . 15
Definition 2.6.11 (Charakteristische Untergruppe) . . . 16
Definition 2.6.14 (Kommutatoruntergruppe) . . . 16
Definition 2.6.17 (Derivierte Reihe) . . . 17
Definition 2.6.19 (Auflösbarkeit) . . . 17
Lemma 2.6.21 (Auflösbarkeit Untergruppe und Quotient) . . . 17
Satz 2.6.22 (Auflösbarkeit in einer k.e.S.) . . . 17
Definition 2.6.24 (Normalreihe) . . . 18
Satz 2.6.26 (Auflösbarkeit und Normalreihe) . . . 18
Definition 2.6.29 (Nilpotenz) . . . 18
2.7 Sylow-Theorie . . . 19
Definition 2.7.1 (p-Gruppe) . . . 19
Definition 2.7.3 (p-Sylow-Untergruppe) . . . 19
Satz 2.7.4 (Erster Sylow-Satz) . . . 19
Satz 2.7.5 (Zweiter Sylow-Satz) . . . 19
Satz 2.7.7 (Dritter Sylow-Satz) . . . 19
2.8 Semidirekte Produkte . . . 20
Definition 2.8.3 (Spaltung) . . . 20
Satz 2.8.5 (Semidirekte Produkte und Spaltende Erweiterungen) . . . 20
2.9 Erzeuger und Relationen . . . 21
Definition 2.9.1 (Wort) . . . 21
Definition 2.9.4 (Freie Gruppe) . . . 21
Definition 2.9.8 (Normale Hülle) . . . 22
Definition 2.9.9 (Universelle Gruppe) . . . 22

1 Multilineare Algebra

1.1 Tensorprodukte

Definition 1.1.1. (Tensorprodukt). *Seien V, W $\mathbb{K}-$Vektorräume. Ein Vektorraum T zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\beta : V \times W \to T$ heißt* **Tensorprodukt** *von V und W, wenn T folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jeden $\mathbb{K}-$Vektorraum Z und jede bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to Z$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\varphi} : T \to Z$ mit $\bar{\varphi} \circ \beta = \varphi$:*



Wir bezeichnen $T := V \otimes W$

Lemma 1.1.2 (Eindeutigkeit des Tensorprodukts). *Falls $T := V \otimes W$ existiert, dann ist dieses Tensorprodukt eindeutig (bis auf eindeutige Isomorphie). Dies folgt direkt aus der universellen Eigenschaft.*

Definition 1.1.3. (Freier Vektorraum). *Sei S eine beliebige Menge. Wir definieren*

$$\mathcal{F}(S) := \bigoplus_{s \in S} \mathbb{K} = \{(a_s)_{s \in S} | a_s = 0 \text{ für fast alle } s \in S\}$$

als den **freien $\mathbb{K}-$Vektorraum über S**.

Lemma 1.1.4 (Existenz des Tensorprodukts). *Das Tensorprodukt $V \otimes W$ existiert für jedes Paar V, W. Die explizite Konstruktion lautet:*

$$V \otimes W := \mathcal{F}(V \times W)/I,$$

wobei I das folgende Ideal sein soll

$$I := \left\langle \begin{array}{c|c} \lambda(v,w) - (\lambda v, w),\ \lambda(v,w) - (v, \lambda w), & v, v_1, v_2 \in V \\ (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w), & w, w_1, w_2 \in W \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) & \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \right\rangle$$

mit der bilinearen Abbildung

$$\beta : V \times W \to V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto [(v, w)] =: v \otimes w$$

Bemerkung 1.1.5. Nach dieser Konstruktion des Tensorproduktes haben wir die folgenden Relationen innerhalb des Tensors von $V \otimes W$ erzwungen:

$$\begin{aligned} \lambda(v \otimes w) &= \lambda v \otimes w = v \otimes \lambda w \\ (v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \end{aligned}$$

Des weiteren existieren natürliche Fortsetzungen des Tensoroperators auf die Vektorräume

1. $\mathrm{Hom}(V, Z) \otimes \mathrm{Hom}(W, U)$:
$$f \otimes g : V \otimes Z \to W \otimes U, \quad v \otimes w \mapsto f(v) \otimes g(v)$$
2. $V^* \otimes W^*$:
$$\alpha \otimes \beta : V \otimes W \to \mathbb{K}, \quad v \otimes w \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)$$
3. $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}$:
$$\Phi : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \lambda \otimes \eta \mapsto \lambda \cdot \eta$$

Lemma 1.1.6. (Lineare Unabhängigkeit im Tensorprodukt)**.** *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebig ungleich Null. Dann sind $v_1 \otimes w_1, \ldots, v_n \otimes w_n$ linear unabhängig in $V \otimes W$.*

Korollar 1.1.7 (Tensorproduktbasis)**.** *Wenn $B = (b_i)_{i \in I}, C = (c_j)_{j \in J}$ Basen in V bzw. W sind, dann ist $B \otimes C := (b_i \otimes c_j)_{i \in I, j \in J}$ eine Basis von $V \otimes W$*

Korollar 1.1.8 (Dimension des Tensorprodukts)**.** *Falls V, W endlichdimensional, dann gilt:*

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

Beispiel 1.1.9. (weitere natürliche Isomorphien)**.** Es sind die folgenden Tensorprodukte und Vektorräume auf natürliche Weise isomorph zueinander:

1. $W \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, W) \quad \varphi : W \otimes V^* \to \mathrm{End}(V),\ w \otimes \alpha \mapsto (v \mapsto \alpha(v)w)$

   Hinweis: Es gibt in $V \otimes W$ Elemente, die sich ggf. nicht durch Elementartensoren darstellen lassen. Diese morphen zu Homomorphismen höreren Ranges.
2. $V \otimes V^* \cong \mathrm{End}(V), \quad \varphi : V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V),\ v \otimes \alpha \mapsto (x \mapsto \alpha(x)v)$
3. $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}, \quad \varphi : \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \lambda \otimes \eta \mapsto \lambda \cdot \eta$

1.2 Äußere Algebra

Definition 1.2.1. (Tensoralgebra)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}-$Vektorraum. Die* **Tensoralgebra** *$T(V)$ ist definiert als*

$$T(V) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ...$$

wobei $V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k}$ meint.

Bemerkung 1.2.2. Die hinzugekommene "Multiplikation" meint hier das Nebeneinanderschreiben der Tensoren.

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes (w_1 \otimes \cdots w_m) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \cdots w_m$$

Diese ist so schon ausreichend definiert, weil $\otimes$ nach Konstruktion bereits bilinear ist. Es benötigt für eine sinnvolle Struktur noch eine Symmetrie-Forderung an diese Tensor-Multiplikation, es genügt allerdings Schiefsymmetrie wie wir sehen werden, um die später noch folgenden gewünschten Objekte besser studieren zu können.

Definition 1.2.3. (Äußere Algebra)**.** *Sei $I_\wedge(V)$ das Ideal definiert durch*

$$I_\wedge(V) := \langle v \otimes v | v \in V \rangle \triangleleft T(V)$$

Dann bezeichnen wir mit

$$\Lambda(V) := T(V)/I_\wedge(V)$$

die **äußere Algebra von V**. *Wir notieren die Elemente von $\Lambda(V)$ mit*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = [v_1 \otimes \cdots \otimes v_k]_{I_\wedge(V)} \in \Lambda(V)$$

Bemerkung 1.2.4. Mit der Definition der äußeren Algebra als Quotienten erzwingen wir die folgenden Eigenschaften:

$$v \wedge v = 0$$
$$v \wedge w = -w \wedge v$$

denn $\underbrace{(v+w) \wedge (v+w)}_{0} = \underbrace{v \wedge v}_{0} + v \wedge w + w \wedge v + \underbrace{w \wedge w}_{0} = 0.$
Entsprechend ist das $\wedge-$Produkt in $\Lambda(V)$ schiefsymmetrisch oder **antikommutativ**.

Definition 1.2.5 (k-te äußere Algebra)**.** *Wir meinen gerade mit*

$$\Lambda^k(V) := [V^{\otimes k}]_{I\wedge(V)} \subset \Lambda(V)$$

den direkten Anteil der äußeren Algebra, der gerade ein Wedgeprodukt aus genau k Vektoren aus V ist. Es gilt daher auf natürliche Weite die äquivalente Definition

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

Korollar 1.2.6 (Endlichkeit und Dimension der äußeren Algebra)**.** *Betrachte $\Lambda(V)$ über einem endlich-dimensionalen Vektorraum V mit $\dim V = n$. Dann gilt*

$$\dim \Lambda(V) = 2^n = 2^{\dim V}$$

Korollar 1.2.7 (Dimension der k-ten äußeren Algebra)**.** *Weil jeweils das geordnete Tupel $(b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_k})_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}$ eine Basis von $\Lambda^k(V)$ bildet, muss*

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$$

1.3 Alternierende Formen und Determinante

Definition 1.3.1 (Alternierende multilineare Abb.)**.** *Eine multilineare Abbildung $\alpha : V^k \to \mathbb{K}$ heißt alternierend, falls*

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$$

für alle $i \neq j \in \{1, ..., n\}$. Wir bezeichnen mit

$$A_k(V) := \{\alpha : V^k \to \mathbb{K} \mid \alpha \text{ multilinear \& alternierend}\}$$

Korollar 1.3.2. *Aufgrund der Schiefsymmentrie des $\wedge-$Produkts entsteht folgende natürliche Isomorphie:*

$$(\Lambda^k V)^* \cong \Lambda^k V^* \cong A_k(V)$$

Definition 1.3.3 (Volumenformen)**.** *Der Vektorraum* $\Lambda^n(V^*)$ *mit* $n = \dim V^*$ *heißt Raum der Determinantenformen. Ein Element* $\omega \in \Lambda^n(V^*) \setminus \{0\}$ *heißt Volumenform auf* V^**.*

Definition 1.3.4 (Induzierte Abbildungen auf Tensoralgebren)**.** *Sei* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$*. Bezeichne mit*

$$T(f) : T(V) \to T(W),\ v_1 \otimes ... \otimes v_n \mapsto f(v_1) \otimes ... \otimes f(v_n)$$

die durch f *auf die Tensoralgebra induzierte multilineare Abbildung. Weiterhin haben wir eine homomorphe Induktion nach* $\Lambda(V)$ *mit*

$$\Lambda(f) : \Lambda(V) \to \Lambda(W),\ v_1 \wedge ... \wedge v_n \mapsto f(v_1) \wedge ... \wedge f(v_n)$$

und kanonisch in dieser Definition schon inkludiert $\Lambda^k f$*.*

Bemerkung 1.3.5. Bemerke dass für V endlichdimensional und $\dim V = n$ die Dimension $\dim \Lambda^n V = 1$ und damit $\Lambda^n f : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$ eine eindimensionale Abbildung vom Rang höchstens 1 sein kann und damit durch $x \mapsto \alpha x$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$ gegeben sein muss. Dieses α ist tatsächlich eindeutig. Es kann nur eine solche Abbildung für jedes f existieren.

Definition 1.3.6. (Determinante)**.** *Sei* V $\mathbb{K}-$*Vektorraum,* $\dim V = n$ *und* $f \in \mathrm{End}(V)$*. Dann ist* $\det f \in \mathbb{K}$ *eindeutig bestimmt als dasjenige Skalar, für das die Funktion*

$$\Lambda^n f : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V), v_1 \wedge ... \wedge v_n \to \det f v_1 \wedge ... \wedge v_n$$

multilinear ist bzw. das Körperelement, für das gilt :

$$\Lambda^n f = \det f \cdot \mathrm{id}_{\Lambda^n V}$$

2 Gruppentheorie

2.1 Grundlagen

Definition 2.1.1 (Transformationsgruppe)**.** *Sei X eine beliebige Menge und $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$ eine Untergruppe. Dann heißt G Transformationsgruppe auf X*

Definition 2.1.2 (Äquivalenz under Transformationsgruppen)**.** *Seien $F, F' \subset X$ und $G \leqslant \mathrm{Sym}(X)$. Dann heißen*

$$F, F' \text{ äquivalent unter } G :\Longleftrightarrow \exists g \in G \text{ mit } g(F) = F'$$

Definition 2.1.3 (G-Symmetrien)**.** *Sei G eine Transformationsgruppe auf X. Die $G-$Symmetrien von $F \subset X$ sind definiert als*

$$\mathrm{Sym}_G(F) := \{g \in G \mid g(F) = F\}$$

also diejenigen Transformationen, die F invariant lassen.

Definition 2.1.4 (Zyklische Untergruppen)**.** *Sei $g \in G$. Dann bezeichnet*

$$\langle g \rangle := \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$$

die durch g erzeugte zyklische Untergruppe.

Definition 2.1.5 (Ordnung)**.** *Sei $g \in G$. Dann ist*

$$\mathrm{ord}(g) := \inf\{k \in \mathbb{Z} | g^k = 1\}$$

die Ordnung von g. Wir bezeichnen mit $|G|$ (Anzahl der Elemente von G) die Ordnung von G

Definition 2.1.6 (Zyklische Gruppen)**.** *Sei G eine Gruppe. Falls $\exists g \in G$ mit $\langle g \rangle = G$, dann heißt G zyklisch. g heißt dann Erzeuger von G.*

Lemma 2.1.7 (Eigenschaften zyklischer Gruppen)**.** *Sei G eine Gruppe.*

1. *Falls G zyklisch und unendlich, dann ist $G \cong \mathbb{Z}$, falls endlich, dann $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*
2. *$g^k \in \langle g \rangle = G$ ist genau dann ein Erzeuger, wenn $\gcd(n, k) = 1$*

3. *Jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist zyklisch. Falls $|G| = n$ und $q \mid n$, dann existiert genau eine Untergruppe $H \leqslant G$ mit $|H| = q$*

4. *Falls $|G| = p$ prim, dann ist jede nichttriviale zyklische Untergruppe von G die Gruppe selbst.*

Definition 2.1.8. (Erzeugte Untergruppen)**.** *Sei $S \subset G$ eine beliebige Teilmenge einer Gruppe G. Dann ist*

$$\langle S \rangle := \bigcap_{S \subset H \leqslant G} H$$

die sogenannte **von S erzeugte Untergruppe**. *G wird von S erzeugt, falls $\langle S \rangle = G$*

2.2 Gruppenwirkungen - Allgemein

Definition 2.2.1. (Gruppenwirkung)**.** *Sei G eine Gruppe und X eine Menge. Eine Wirkung $G \curvearrowright^{\alpha} X$ ist ein Homomorphismus*

$$\alpha : G \to \mathrm{Sym}(X),\ g \mapsto \alpha_g$$

Entsprechend bleibt bei einer qualifizierten Abbildung die Homomorphie-Eigenschaft zu überprüfen:

$$\forall g, h \in G \quad \alpha_{g \cdot h} = \alpha_g \circ \alpha_h$$

Ein $G-$Raum ist dann eine Menge X zusammen mit einer festen Wirkung $G \curvearrowright^{\alpha} X$. Falls α fixiert bleibt, schreibe $\alpha_g(x) =: g \cdot x$ für $x \in X, g \in G$

Definition 2.2.2. (Bahn / Orbit)**.** *Sei $G \curvearrowright^{\alpha} X$ eine Wirkung und $x \in X$. Dann bezeichnet*

$$G \cdot x := \{\alpha_g(x) \mid g \in G\}$$

die **Bahn** *oder den* **Orbit von** *x.*

Korollar 2.2.3 (Orbit-Äquivalenzrelation)**.** *Sei $G \curvearrowright^{\alpha} X$ eine Wirkung. Die Relation*

$$x \sim y :\Longleftrightarrow G \cdot x = G \cdot y$$

ist eine Äquivalenzrelation. Wir bezeichnen den Quotienten

$$X/_{\sim} =: G \backslash X$$

als Bahnenraum oder Quotientenraum der Wirkung. Es gilt auch die triviale Äquivalenz:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists h \in G \quad x = h \cdot y$$

Lemma 2.2.4. (Orbitzerlegung). *Sei $G \curvearrowright^{\alpha} X$ eine Wirkung. Dann zerlegt sich die Menge X disjunkt in die Orbits der Äquivalenzklassen von $G\backslash X$:*

$$X = \bigsqcup_{[x]\in G\backslash X} G \cdot x$$

Definition 2.2.5. (Transitivität). *Eine Wirkung $G \curvearrowright^{\alpha} X$ heißt transitiv, falls $\exists x \in X$ mit $G \cdot x = X$.*

Bemerkung 2.2.6. Falls $G \curvearrowright^{\alpha} X$ eine transitive Wirkung ist, dann gilt die Äquivalenz

$$\exists x \in X \; G \cdot x = X \iff \forall x \in X \; G \cdot x = X$$

Bemerkung 2.2.7. Per Definition wirkt G auf jede Bahn $G \cdot x$ transitiv. Jede Wirkung ist damit disjunkt zusammengesetzt aus transitiven Wirkungen und wir können unser Studium deshalb auf diese beschränken.

Definition 2.2.8. (Stabilisator). *Sei $G \curvearrowright^{\alpha} X$ eine Wirkung und $x \in X$. Dann ist*

$$\mathrm{Stab}(x) := \{g \in G |\; \alpha_g(x) = x\}$$

Wir nennen x einen Fixpunkt der Wirkung, falls $\mathrm{Stab}(x) = G$. *Offensichtlich ist* $\mathrm{Stab}(x) \leqslant G$

Definition 2.2.9 (G-Äquivarianz). *Seien $G \curvearrowright^{\alpha} X$ und $G \curvearrowright^{\beta} Y$ zwei $G-$Wirkungen. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt $G-$***äquivariant***, falls*

$$\varphi(\alpha_g(x)) = \beta_g(\varphi(x)) \quad \forall x \in X, g \in G$$

2.3 Gruppenwirkungen auf Gruppen

Definition 2.3.1 (Links- und Rechtswirkungen). *Seien $G \curvearrowright^{L} G$ und $G \curvearrowright^{R} G$ die Links- bzw. Rechtswirkungen von G auf sich selbst mit $L_g(h) := gh$ und $R_g(h) := hg^{-1}$. Dann können wir diese Wirkung einfach als die abgeschlossene Gruppenoperation sehen und damit die Struktur der Gruppe selbst besser untersuchen.*

Definition 2.3.2 (Nebenklassen)**.** *Sei $H \leqslant G$ Untergruppe. Dann können wir die Wirkungen aus 2.3.1 eben so gut einschränken auf $H \curvearrowright G$. Betrachte zunächst $H \curvearrowright^L G$ die* ***Links-****Wirkung von H. Dann entstehen nach der Orbitzerlegung 2.2.4 die* ***Rechts-****Nebenklassen in ihrem Quotienten, die wir mit*

$$Hg := \{hg \in G |\ h \in H\} \in H\backslash G$$

bezeichnen. Entsprechend entstehen bei der ***Rechts-****Wirkung $H \curvearrowright^R G$ die* ***Links-****Nebenklassen*

$$gH := \{gh \in G |\ h \in H\} \in G/H$$

Hinweis: *Häufig werden die Notationen inkonsistent benutzt. Es gilt jeweils den Quotienten und dessen Nebenklassen immer bezüglich der aktuellen Wirkung zu betrachten.*

Bemerkung 2.3.3. Für abelsche Gruppen G stimmen Rechts- und Linksnebenklassen überein.

Definition 2.3.4 (Konjugationswirkung)**.** *Die sehr häufig betrachtete Konjugationswirkung $G \curvearrowright^C G$ ist definiert durch $C_g(h) = ghg^{-1}$. Hier betrachtet man wiederrum selten Nebenklassen, sondern eher Untergruppen* ***auf die*** *gewirkt wird. Wir bezeichnen mit*

$$gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \in G | h \in H\}$$

die durch g zu H konjugierte Untergruppe.

Satz 2.3.5 (Klassifikation von transitiven Wirkungen)**.** *Sei $G \curvearrowright X$ eine transitive Wirkung und $x \in X$ fest (Bemerke 2.2.6). Dann gilt die folgende Isomorphie:*

$$G \curvearrowright X \cong G \curvearrowright G/\mathrm{Stab}(x)$$

mittels des Isomorphimus

$$\varphi : X \to G/\mathrm{Stab}(x), \quad y = g \cdot x \mapsto [g]_{\mathrm{Stab}(x)}$$

man sieht:

$$\ker \varphi = \{y = g \cdot x \in X |\ g \in \mathrm{Stab}(x)\} = \{x\}$$
$$\varphi^{-1} : G/\mathrm{Stab}(x) \to X,\ [g]_{\mathrm{Stab}(x)} \mapsto g \cdot x$$

alles wohldefiniert.

Korollar 2.3.6. (Klassifikation von Wirkungen)**.** *Sei $G \curvearrowright^\alpha X$ eine Wirkung. Dann besteht ein Isomorphismus:*

$$G \curvearrowright X \ \cong \bigsqcup_{[x] \in X/G} G \curvearrowright G/\mathrm{Stab}(x)$$

mittels der Konstruktion in 2.3.5

Definition 2.3.7 (Zentralisator)**.** *Sei $G \curvearrowright^C H$ die Konujgationswirkung auf $H \leqslant G$ Untergruppe. Dann bezeichnen wir mit*

$$Z_G(h) := \{g \in G | gh = hg\}$$

den Zentralisator von $h \in H$.

Bemerkung 2.3.8. Es gilt in der Situation 2.3.7

$$\mathrm{Stab}(h) = Z_G(h)$$

Lemma 2.3.9. (Bahnformeln / Orbit-Theoreme)**.** *Sei $G \curvearrowright^\alpha X$ eine Wirkung. Dann folgt aus 2.3.6*

$$|X| = \sum_{[x] \in X/G} |G/\mathrm{Stab}(x) \tag{1}$$

Andererseit folgt ebenso für die Wirkung

$$\mathrm{Stab}(x) \curvearrowright^R G \cong \bigsqcup_{[x] \in G/\mathrm{Stab}(x)} \mathrm{Stab}(x) \curvearrowright^L \mathrm{Stab}(x)$$

und damit

$$|G \cdot x| = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}(x)|} \tag{2}$$

Mittels erneuter Anwendungen von 2.3.6 und entsprechender Umformungen erhält man außerdem

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \tag{3}$$

für endliche X, G

Satz 2.3.10. (von Lagrange)**.** *Sei G eine endliche Gruppe und $H \leqslant G$. Dann gilt*

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

insbesondere teilt die Ordnung von H die Ordnung von G.

Korollar 2.3.11 (Direkte Lagrange-Folgerungen)**.**

1. *Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$. Dann gilt* $\mathrm{ord}(g) || G|$

2. Sei $|G| = p$ **prim**. *Dann ist G zyklisch.*

Definition 2.3.12 (Index einer Untergruppe)**.** *Sei G Gruppe mit $H \leqslant G$. Dann bezeichnet*

$$|G/H| =: [G : H]$$

den sogenannten Index von H in G.

2.4 Normalteilertheorie

Definition 2.4.1. (Normalteiler)**.** *Sei G eine Gruppe und $N \leqslant G$. Dann heißt N* ***Normalteiler*** *in G, falls für die Wirkung $G \curvearrowright^C G$ gilt:*

$$gNg^{-1} = N$$

Wir schreiben dann $N \triangleleft G$.

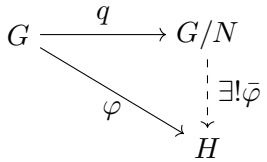
Satz 2.4.2. (Homomorphiesatz für Gruppen)**.** *Sei G eine Gruppe und $N \triangleleft G$. Dann gilt*

a) G/N mit der natürlichen Multiplikation $gN \cdot hN = g \cdot hN$ ist eine Gruppe

b) die natürliche Quotientenabbildung $q : G \to G/N,\ g \mapsto gN$ ist ein surjektiver Homomorphismus mit $\ker q = N$.

c) für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $\ker \varphi = N$ ist die Abbildung $\bar{\varphi} : G/N \to \operatorname{im} \varphi,\ [g] \mapsto \varphi(g)$ ein Isomorphismus

d) ***(Universelle Eigenschaft)****. Für jeden Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $N \subset \ker \varphi$ existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\bar{\varphi} : G/N \to H$, sodass folgendes Diagramm kommutiert:*



Falls $N = \ker \varphi$ ist $\bar{\varphi}$ Isomorphismus siehe c)

Lemma 2.4.3 (Index 2 impliziert Normalität)**.** *Sei G Gruppe mit $H \leqslant G$, $[G : H] = 2$. Dann gilt bereits $H \triangleleft G$.*

2.5 Geometrie und Gruppen

Satz 2.5.1. (von Euler). *Sei $G = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Dann existiert für jedes $g \in G$ ein $l \leqslant \mathbb{R}^3, \dim l = 1$ mit $g \cdot l = l$ und g ist eine Rotation um l. (Jedes Element in SO(3) ist eine Rotation und besitzt eine Rotationsachse.) Alternativ betrachte $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ mit $A \cdot x = Ax$, dann sagt der Satz*

$$\forall g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\ \exists L \leqslant \mathbb{R}^3 \quad \mathrm{Stab}(l) = \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \quad \forall l \in L$$

Lemma 2.5.2 (Polyeder-Rotation). *Sei $G \leqslant \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})S$ eine Gruppe, die nicht zyklisch oder isomorph zuD_{2n} für $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann gilt $|G| \in \{12, 24, 60\}$. Diese Zahlen erhalten wir durch 2.3.9 kombiniert mit 2.5.1 und der Wirkung $G \curvearrowright S^2$*

Satz 2.5.3. (Klassifikation endlicher Rotationsgruppen). *Sei $G \leqslant \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ endlich. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad D_{2n} \quad \mathrm{Alt}(4) \quad \mathrm{Sym}(4) \quad \mathrm{Alt}(5)$$

2.6 Strukturtheorie

Definition 2.6.1. (Kurze exakte Folge / Sequenz). *Ein Diagramm von Gruppen und Homomorphismen*

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} Q \longrightarrow \mathbb{1}$$

heißt kurze exakte Folge oder **k.e.S**, *falls*

(i) i *injektiv ist*

(ii) q *surjektiv ist und*

(iii) $\mathrm{im}\, i = \ker q$

Falls so eine **k.e.S** *existiert, dann sagt man auch, dass G als Erweiterung von Q durch N entsteht.*

Bemerkung 2.6.2. Wir lösen das Problem, dass N möglicherweise nicht selbst ein Normalteiler in G sein kann, weil $N \not\subset G$. Mit einer k.e.S. gilt jedoch:

$$i(N) \triangleleft G$$

Definition 2.6.3 (Einfach)**.** *Eine Gruppe G (bzw. eine algebraische Struktur z.B. Ring, Modul, Algebra) heißt* **einfach***, falls jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ entweder injektiv oder trivial ist.*

Bemerkung 2.6.4. Eine Gruppe G ist also (nach 2.4.2) genau dann einfach, wenn sie keine nichttrivialen Normalteiler besitzt.

Satz 2.6.5 (Einfachheit von $\mathrm{Alt}(n)$)**.** *Für $n \geq 5$ ist die Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ einfach, also*

$$N \triangleleft \mathrm{Alt}(n) \iff N = \{\mathbb{1}\} \text{ oder } \mathrm{Alt}(5)$$

Bemerkung 2.6.6. Wie wir in AL20: Algebra II - Weiterführende Konzepte sehen werden, ist das der Grund, warum im Polynomring $\mathbb{K}[T]$ im Allgemeinen keine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad ≥ 5 existiert.

Lemma 2.6.7. (Erzeuger von $\mathrm{Alt}(n)$)**.** *Die Alternierende Gruppe $\mathrm{Alt}(n)$ wird durch die Dreierzykel (ijk), $1 \leq i, j, k \leq n$ erzeugt. Für $n \geq 4$ sind je zwei Deierzykel in $\mathrm{Alt}(n)$ zueinander konjugiert.*

Definition 2.6.8. (Automorphismus)**.** *Ein Automorphismus $\alpha : G \to G$ ist ein invertierbarer Homomorphismus (Isomorphismus auf sich selbst). Wir bezeichnen mit*

$$\mathrm{Aut}(G) := \{\alpha : G \to G \mid \alpha \text{ Automorphismus}\}$$

die Gruppe der Automorphismen auf G mit der Gruppenoperation $\circ$.

Lemma 2.6.9 (Innere Automorphismen, Zentrum)**.** *Die Wirkung $G \curvearrowright^C G$ ist für jedes $g \in G$ ein Automorphismus. Insbesondere gilt für jede Gruppe G die Homomorphie:*

$$C : G \to \mathrm{Aut}(G),\ g \mapsto (C_g : h \mapsto ghg^{-1})$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Inn}(G) := \operatorname{im} C$ die Innere Automorphismusgruppe von G, also alle Autormorphismen der Form C_g. Wir bekommen die k.e.S. nach 2.6.1 mit

$$\mathbb{1} \longrightarrow Z(G) \longrightarrow G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \xrightarrow{C} \mathbb{1}$$

wobei $Z(G) := \ker C = \{g \in G | gh = hg\ \forall h \in G\}$ das **Zentrum von** *G ist.*

Lemma 2.6.10 (Äußere Automorphismen)**.** *Wir definieren*

$$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$$

Es besteht die k.e.S.

$$\mathbb{1} \longrightarrow \mathrm{Inn}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}(G) \xrightarrow{q} \mathbb{1}$$

Definition 2.6.11. (Charakteristische Untergruppe)**.** *Sei G eine Gruppe und $N \leqslant G$ eine Untergruppe. Dann heißt N* **charakteristisch***, falls*

$$\forall \alpha \in \mathrm{Aut}(G) \quad \alpha(N) := \{\alpha(n) |\ n \in N\} = N$$

Da insbesondere $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ *gilt*

$$N \text{ charakteristisch} \Longrightarrow N \text{ normal in } G$$

Korollar 2.6.12 (Charakteristik $Z(G)$)**.** *Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist charakteristisch.*

Bemerkung 2.6.13 (Tipp)**.** Zur strukturtheoretischen Untersuchung der Automorphismengruppe einer Gruppe G reicht es aus, Erzeuger von G zu untersuchen. Die Bilder aller erzeugten Elemente sind dann durch das Bild der Erzeuger eindeutig bestimmt. Insbesondere muss Bijektivität gewährleistet sein.

Definition 2.6.14. (Kommutatoruntergruppe)**.** *Sei G eine Gruppe. Dann definieren wir*

$$[G,G] := \{[x,y] |\ x,y \in G\} \qquad [x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$$

als die Kommutatoruntergruppe von G. Es gelten insbesondere die Relationen ($x,y,z \in G$)

i) $[x,y]^{-1} = [y,x]$

ii) $[xy,z] = x[y,z]x^{-1}[x,z] =: [y^x, z^x]$

iii) $[z,xy] = [z,x]x[z,y]x^{-1} = [z,x][z^x, y^x]$

Korollar 2.6.15 (Charakteristik Kommutatoruntergruppe)**.** *Die Kommutatoruntergruppe $[G,G]$ von G ist charakteristisch. Insbesondere ist der Quotient $G_{ab} := G/[G,G]$ eine abelsche Gruppe genannt Ableanisierung von G die die universelle Eigenschaft erfüllt analog zu 2.4.2 d).*

Bemerkung 2.6.16. Falls G abelsch, dann ist $[G,G] = \{\mathbb{1}\}$ und $G_{ab} = G$

Definition 2.6.17. (Derivierte Reihe)**.** *Sei* $(G^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *rekursiv definiert durch:*

$$G^{(0)} := G, \qquad G^{(k)} := [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}],\ k \geq 1$$

Wir bezeichnen $(G^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *als die derivierte Reihe von* G*. Insbesondere gilt in absteigender Weise:*

$$... \triangleright G^{(k-1)} \triangleright G^{(k)} \triangleright G^{(k+1)} \triangleright ...$$

(eigentlich sogar mehr, nämlich Charakteristik)

Bemerkung 2.6.18. Obwohl nicht gleich offensichtlich, gelt jedoch ebenso auch $G^{(k)} \triangleleft G$

Definition 2.6.19. (Auflösbarkeit)**.** *Eine Gruppe* G *heißt* **auflösbar***, wenn ihre derivierte Reihe an* $\mathbb{1}$ *stabilisiert, also*

$$G^{(k)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \{\mathbb{1}\}$$

Bemerkung 2.6.20.

- Abelsche Gruppen sind auflösbar und stabilisieren bereits nach einem Schritt in der derivierten Reihe.
- Eine einfache nicht-abelsche Gruppe kann nicht auflösbar sein, weil ansonsten ein nicht-trivialer Normalteiler existieren würde.

Lemma 2.6.21. (Auflösbarkeit Untergruppe und Quotient)**.** *Sei* G *eine auflösbare Gruppe, dann gilt für jede Quotientenabbildung* $q : G \to Q$ *und jede Untergruppe* $H \leqslant G$*:*

$$H \text{ ist auflösbar} \quad \& \quad Q \text{ ist auflösbar}$$

Satz 2.6.22. (Auflösbarkeit in einer k.e.S.)**.** *Sei eine k.e.S. gegeben durch*

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} Q \longrightarrow \mathbb{1}$$

Dann gilt:

$$N, Q \text{ sind auflösbar} \iff G \text{ ist auflösbar}$$

Bemerkung 2.6.23. Satz 2.6.22 ist fundamental zur Untersuchung von endlichen Gruppen. Dieser Satz ermöglicht es schlussendlich die Struktur endlicher Gruppen zu klassifizieren und auf die Bestandteile N und Q

Definition 2.6.24. (Normalreihe)**.** *Sei G eine Gruppe. Eine absteigende Folge $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \triangleleft G$ von Normalteilern in G heißt Normalreihe. Wir nennen $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ endlich, falls für*

$$G \supset N_1 ... \supset N_k \supset ...$$

ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $N_l = \{\mathbb{1}\}$ für $l \geq n$. Wir bezeichnen N_k/N_{k+1} als die Subquotienten der Normalreihe.

Bemerkung 2.6.25. Die derivierte Reihe $G^{(k)}$ ist solch eine Normalreihe mit abelschen Subquotienten. Wir benötigen diesen etwas allgemeineren Begriff, weil für die nachfolgende Eigenschaft eine Äquivalenz gilt.

Satz 2.6.26. (Auflösbarkeit und Normalreihe)**.** *Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn sie eine Normalreihe $(N_k)_{k\in\mathbb{N}} \triangleleft G$ mit abelschen Subquotienten besitzt.*

Bemerkung 2.6.27. Die Äquivalenz 2.6.26 gibt uns zumindest die Möglichkeit direkt zu sagen, ob eine Gruppe auflösbar ist, wenn wir irgendeine Normalreihe von G mit abelschen Subquotienten bereits kennen. In jeglich sonstiger Hinsicht ist die Aussage eher schwach.

Definition 2.6.28 (Untere Zentralreihe)**.** *Sei G eine Gruppe. Dann definieren wir die Folge $(G_{(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (\gamma_k(G))_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch*

$$\gamma_0(G) := G \qquad \gamma_k(G) = [G, \gamma_{k-1}(G)]$$

Diese heißt untere Zentralreihe an G. Wir nennen eine Normalreihe aus 2.6.24 auch Zentralreihe, falls die Subquotienten N_k/N_{k+1} überdies zentral in G/N_{k+1} sind.

Definition 2.6.29. (Nilpotenz)**.** *Eine Gruppe G heißt nilpotent, wenn ihre untere Zentralreihe an $\{\mathbb{1}\}$ stabilisiert.*

Bemerkung 2.6.30. Jede nilpotente Gruppe ist auflösbar, weil die Subquotienten offensichtlich abelsch sind. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. In der Situation von 2.6.22 ist G außerdem nilpotent, wenn N und Q nilpotent sind und außerdem $N \leqslant Z(G)$.

2.7 Sylow-Theorie

Definition 2.7.1. (p-Gruppe). *Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^n$ für p* **prim** *und $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir G eine $p-$Gruppe.*

Lemma 2.7.2 (Eigenschaften von $p-$Gruppen). *Sei G eine $p-$Gruppe. Dann gilt*

1. *Falls $G \neq \{\mathbb{1}\}$ dann ist $Z(G) \neq \{\mathbb{1}\}$*
2. *G ist nilpotent*
3. *Falls $|G| = p^2$, dann ist G abelsch.*

Definition 2.7.3. (p-Sylow-Untergruppe). *Sei G eine Gruppe und $|G| = m \cdot p^n$ für $m, n \in \mathbb{N}, p$* **prim** *und $\gcd(m, p) = 1$. (Eine solche Darstellung gibt es immer.) Dann heißt $S \leqslant G$ eine $p-$***Sylow-Untergruppe***, falls $|S| = p^n$. Wir bezeichnen mit*

$$\mathrm{Syl}_p(G) := \{S \leqslant G |\ S \text{ ist } p-\text{Sylow-Untergruppe}\}$$

die Menge der $p-$Sylow-Untergruppen von G. Im Nachfolgenden nennen wir diese Art von Untergruppen der Einfachheit halber gelegentlich $p-$Sylow's.

Satz 2.7.4. (Erster Sylow-Satz). *Sei G endlich. Für jede Primzahl $p|\ |G|$ existiert eine $p-$Sylow-Untergruppe.*

Satz 2.7.5. (Zweiter Sylow-Satz). *Sei G eine endliche Gruppe und p* **prim**. *Dann gilt*

i) Jede $p-$Untergruppe ist in einer $p-$Sylowuntergruppe enthalten

ii) Alle $p-$Sylows sind zueinander konjugiert, also

$$\forall g \in G \quad g\mathrm{Syl}_p(G)g^{-1} = \mathrm{Syl}_p(G)$$

Korollar 2.7.6 (Normalität durch Sylow). *Sei G eine Gruppe und $S \leqslant G$ die einzige $p-$Sylowuntergruppe. Dann ist $S \triangleleft G$ und G nicht einfach.*

Satz 2.7.7. (Dritter Sylow-Satz). *Sei G eine endliche Gruppe und p* **prim**. *Dann ist*

$$|\mathrm{Syl}_p(G)| \equiv 1 \mod p$$

2.8 Semidirekte Produkte

Definition 2.8.1 (Semidirektes Produkt)**.** *Sei eine Wirkung $H \curvearrowright^{\alpha} \mathrm{Aut}(N)$ gegeben. Dann definiere $N \rtimes_\alpha H$ als diejenige Gruppe der Obermenge $N \times H$ mit der Gruppenoperation*

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) := (n_1 \alpha_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \qquad (n, h)^{-1} := (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$$

Die Gruppe $N \rtimes_\alpha H$ heißt **semidirektes Produkt** *von N und H bezüglich der Wirkung $\alpha : H \to \mathrm{Aut}(N)$*

Bemerkung 2.8.2. Die Gruppe $N \rtimes_\alpha H$ enthält die Gruppen

$$N \cong \{(n, \mathbb{1}) |\ n \in N\} \lhd N \rtimes_\alpha H \qquad H \cong \{(\mathbb{1}, h) |\ h \in H\} \leqslant N \rtimes_\alpha H$$

Wir bekommen entsprechend als k.e.S.

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes_\alpha H \xrightarrow{q} H \longrightarrow \mathbb{1}$$

mit $i(n) = (n, 1)$ und $q(n, h) = h$ mit einer Besonderheit

Definition 2.8.3. (Spaltung)**.** *Eine kurze exakte Folge*

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} Q \longrightarrow \mathbb{1}$$

spaltet, *falls ein Homomorphiusmus $s : Q \to G$ existiert mit $q \circ s = \mathrm{id}_Q$. Wir können dann " Q aus G herausschneiden"*

Bemerkung 2.8.4. Eine kurze exakte Folge

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \rtimes_\alpha H \xrightarrow{q} H \longrightarrow \mathbb{1}$$

spaltet.

Satz 2.8.5. (Semidirekte Produkte und Spaltende Erweiterungen)**.** *Es gilt die folgende Äquivalenz*

$$\mathbb{1} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{q} Q \longrightarrow \mathbb{1} \text{ spaltet} \quad \Longleftrightarrow \quad G \cong N \rtimes_\alpha Q$$

Satz 2.8.6 (Anwendung: Gruppen oder Ordnung 12)**.** *Sei $|G| = 12$. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen*

$$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \qquad D_{12} \qquad \mathrm{Alt}(4) \qquad \mathrm{Dic}_3$$

2.9 Erzeuger und Relationen

Definition 2.9.1. (Wort)**.** *Sei A eine Menge. Ein Wort w mit Buchstaben in A ist eine endliche Folge $a_1 a_2 \cdots a_n$ mit $a_i \in A$, $(n \in \mathbb{N})$. Die Menge der Wörter mit Buchstaben in A wird mit A^* bezeichnet.*

Definition 2.9.2 (Produkt von Wörtern)**.** *Seien w, w' zwei Wörter mit Buchstaben in A.*

$$w = a_1 \cdots a_n \qquad w' = a'_1 \cdots a'_m$$

Das Produkt ww' wird definiert als

$$ww' = a_1 \cdots a_n a'_1 \cdots a'_m$$

Definition 2.9.3 (Menge der reduzierten Wörter)**.** *Sei S Menge und setze $\bar{S} : \{\bar{s} |\ s \in S\}$ sowie $A := S \sqcup \bar{S}$. Wir definieren die Menge der reduzierten Wörter*

$$\mathbf{F}_S := \{w \in A^* |\ \text{für jedes } s \in S \text{ enthält } w \text{ kein Teilwort der Gestalt } s\bar{s} \text{ oder } \bar{s}s\}$$

Falls $w \in A^* \setminus \mathbf{F}_S$, dann heißt w reduzibel. Eine Reduktion eines reduziblen Worts ist das schrittweise entfernen von Teilwörtern der Form $s\bar{s}$ bzw. $\bar{s}s$. Diese Operation nennen wir $\mathrm{Red}(w)$

Definition 2.9.4. (Freie Gruppe)**.** *Wir bezeichnen $\mathbf{F}_S$ als die freie Gruppe über der Erzeugendenmenge S mit der Gruppenoperation*

$$w \cdot w := \mathrm{Red}(ww')$$

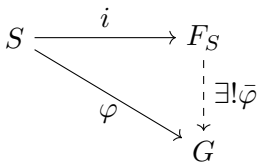
mit ww' im Sinne von 2.9.2. Diese ist tatsächlich assoziativ mit Existenz von Neutralem und Inversen Element(en).

Lemma 2.9.5 (Universelle Eigenschaft der freien Gruppe)**.** *Als Alternativdefinition oder auch als Eigenschaft sagen wir: Eine Gruppe F_S heißt frei auf der erzeugenden Menge S, wenn*

i) $S \subset F_S$

ii) für jede Gruppe G und für jede Abbildung $\varphi : S \to G$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\bar{\varphi} : F_s \to G$ mit $\bar{\varphi}|_S = \varphi$. Es gilt wieder das kommutative Diagramm

Tatsächlich ist $\mathbf{F}_S$ die eindeutige freie Gruppe mit genau dieser universellen Eigenschaft.



Definition 2.9.6 (Freie Gruppe vom Rang n)**.** *Die Gruppe* $\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{\langle s_1,...,s_n\rangle}$ *heißt freie Gruppe vom Rang n oder auf n Erzeugern.*

Lemma 2.9.7 (Relation zwischen Gruppen und freien Gruppen)**.** *Sei G eine Gruppe. Dann gilt*

1. *G ist Quotient einer freien Gruppe.*
2. *Falls* $G = \langle g_1, ..., g_n\rangle$*, dann ist G sogar ein Quotient einer freien Gruppe* $\mathbf{F}_n v$ *vom Rang n*

Definition 2.9.8. (Normale Hülle)**.** *Sei G eine Gruppe und* $R \subset G$ *eine Teilmenge. Dann nennen wir*

$$\langle\langle R\rangle\rangle := \bigcap_{R\subset N\triangleleft G} N$$

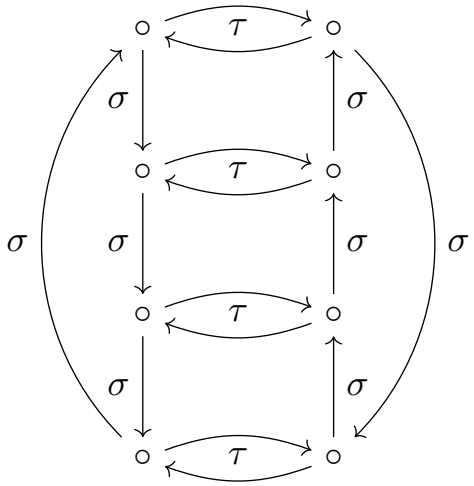
die normale Hülle in R. Analog zu 2.1.8 ist N der kleinste Normalteiler in G, der R enthält.

Definition 2.9.9. (Universelle Gruppe)**.** *Sei S eine Menge (Menge der Erzeuger) und* $R \subset \mathbf{F}_S$ *eine Teilmenge (Menge der Relationen). Die Gruppe*

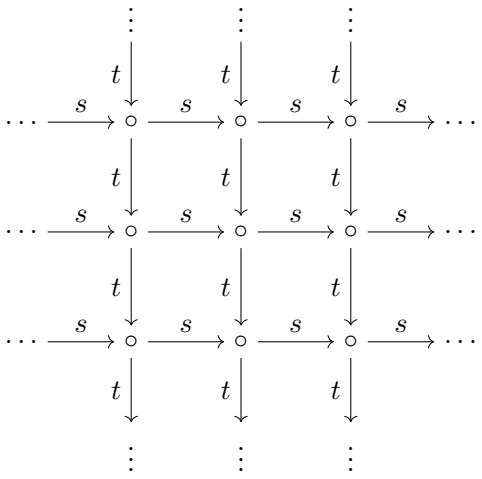
$$\langle S|R\rangle := \mathbf{F}_S/\langle\langle R\rangle\rangle$$

heißt universelle Gruppe erzeugt durch S mit Relationen R. Falls $G \cong \langle S|R\rangle$*, so sagt man, dass G eine Präsentation mit Erzeugern S und Relationen R besitzt.*

Bemerkung 2.9.10. Diese Theorie hilft uns, beliebige Gruppen mit Präsentation durch Erzeuger und Relationen in Garphen, soganannten **Cayley-Graphen** zu untersuchen. Ein Beispiel sei gezeigt für die folgenden Gruppen.



D_8 mit Präsentation
$\langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \mathrm{id},\ \tau^2 = \mathrm{id}, \sigma\tau\sigma = \tau \rangle$



$\mathbb{Z}^2$ mit Präsentation $\langle s, t \mid st = ts \rangle$

Die Knoten innerhalb eines Caley-Graphen stehen für die Elemente der Gruppe und die Pfeile oder Verbindungen für die Relation zwischen ihnen.

Hinweis zur Urheberschaft / Copyright Notice

Diese Zusammenfassung ist eine eigenständige Aufbereitung von Lehrinhalten und erhebt keinen Anspruch auf inhaltliche Eigenständigkeit.[1] This summary is an independent compilation of course content and makes no claim to originality of the underlying material.[2]

[1] Deutsch: Die in diesem Werk enthaltenen Inhalte basieren vollständig auf Vorlesungsskripten und -notizen von Prof. A. Thom, Dr. V. Alekseev; Auswahl, Aufbereitung und Darstellung stammen vom Autor. Bei Weitergabe, Vervielfältigung oder Verwendung dieses Werkes (auch auszugsweise) wird um einen Hinweis auf den Autor als Zusammensteller gebeten. Hinweise oder Korrekturen können per E-Mail an `mail@math.moschpit.de` geschickt werden.

[2] English: The content of this work is based entirely on the lecture scripts and notes of Prof. A. Thom, Dr. V. Alekseev; the selection, arrangement, and presentation are the author's own work. In the event of redistribution, reproduction, or use of this work (in whole or in part), a reference to the author as compiler is kindly requested. Feedback or corrections may be sent via email to `mail@math.moschpit.de`.